Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Dr. K. Halupczok

29.06.2006

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

SoSe 2006

Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, den 06.07.2006, zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1.

Zeige:

(a) Für alle ungeraden Primzahlen $q < 41$ gilt $\left(\frac{-163}{q}\right) = -1$.

(b) (Euler) Das Polynom x^2-x+41 nimmt an den 41 Stellen $x = 0, 1, \ldots, 40$ nur Primzahlen als Werte an.
Hinweis: $4n^2 - 4n + 4 \cdot 41 = (2n-1)^2 + 4 \cdot 41 - 1$.

Aufgabe 2.

(a) Bestimme alle Lösungen der Kongruenz $x^4 - 6x^2 + 35 \equiv 0$ (43).

(b) Sei $p > 2$. Zeige: Dann hat die Kongruenz $ax^2 + bx + c \equiv 0$ (p), $p \nmid a$, genau $1 + \left(\frac{b^2-4ac}{p}\right)$ viele Lösungen. Wie berechnet man diese?
Bemerkung: Das Legendresymbol wird $= 0$ gesetzt, falls $p \mid (b^2 - 4ac)$.

Aufgabe 3.

Zeige, daß es unendlich viele Primzahlen der Form $5k - 1$ gibt.
Hinweis: Für jedes $n > 1$ hat $5(n!)^2 - 1$ einen Primteiler $p > n$ der Form $5k - 1$.

Aufgabe 4.

Sei $p > 2$ prim. Wieviele Reste mod p sind sowohl Quadrat als auch Quadrat plus 1? **Beispiel:** Für $p = 7$ gibt es genau zwei solcher Reste, nämlich $1 = 1^2 = 0^2 + 1$ und $2 \equiv 3^2 \equiv 1^2 + 1$ (7).