**Mathematisches Institut**
**Abt. für Reine Mathematik**
Dr. K. Halupczok

13.07.2006

Übungen zur Vorlesung

# Elementare Zahlentheorie

SoSe 2006

## Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, den 20.07.2006, zu Beginn der Vorlesung

### Aufgabe 1.

Sei $n \geq 1$. Zeige:

(a) $\mu^2(n) = 1 \Rightarrow d(n) = 2^{\omega(n)}$

(b) $d(n^2) = (2^\omega * \underline{1})(n)$

(c) $\mu^2(n) = 1 \Rightarrow \mu(n) = (-1)^{\omega(n)}$

(d) $\displaystyle\sum_{k|n} \mu(k)\, d\Big(\frac{n}{k}\Big) = 1$

(e) $\displaystyle\sum_{k|n} \mu(k)\, d(k) = (-1)^{\omega(n)}$

(f) $\mu^2(n) = 1 \Rightarrow \varphi(n) = (-1)^{\omega(n)} \displaystyle\sum_{d|n} d\,\mu(d)$

### Aufgabe 2.

(a) Sei $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ die Primfaktorzerlegung von $n > 1$ und $f$ eine multiplikative Funktion. Beweise die Formel

$$\sum_{d|n} \mu(d)\, f(d) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \cdots (1 - f(p_r)).$$

(b) Zeige als Anwendung für $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ die Formel

$$\sum_{d|n} \mu(d)\, \sigma(d) = (-1)^r p_1 \cdots p_r.$$

### Aufgabe 3.

Zeige:

(a) Die Zahl $d(n)$ ist genau dann ungerade, wenn $n$ eine Quadratzahl ist.
(b) Hat $d(n)$ einen ungeraden Primteiler, so ist $\mu(n) = 0$.
(c) Ist $\sigma(n)$ prim, dann ist auch $d(n)$ prim.

### Aufgabe 4.

Zeige:

(a) Zu jedem $n > 1$ gibt es natürliche Zahlen $n_1$ und $n_2$ mit $d(n_1)+d(n_2) = n$.
(b) Aus der *Goldbachschen Vermutung* (jede gerade Zahl ist Summe zweier Primzahlen) folgt: Zu jeder geraden Zahl $2n \in \mathbb{N}$ gibt es natürliche Zahlen $n_1$ und $n_2$ mit $\sigma(n_1) + \sigma(n_2) = 2n$.