Klausur in Elementarer Zahlentheorie, SoSe 2006

Aufgabe 1

Zeige für $m, n \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$:
Aus $ab \equiv cd \ (m)$, $b \equiv d \ (n)$, $(b, n) = 1$ folgt $a \equiv c \ ((m, n))$.

Aufgabe 2

Zeige: Für $n \geq 1$ ist die Zahl

$$1! + 2! + \cdots + n!$$

genau dann eine Quadratzahl, wenn $n = 1$ oder $n = 3$ ist.

Aufgabe 3

Zeige: Ist $p > 2$ prim, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, p) = 1$, $\mathrm{ord}_p(a) = 2k$, $k \in \mathbb{N}$,
so folgt $a^k \equiv -1 \ (p)$.

Aufgabe 4

Bestimme alle Lösungen der Kongruenz

$$x^3 + 9x - 4 \equiv 0 \ (100).$$

Aufgabe 5

Sei $p > 5$ eine Primzahl. Zeige:

$$\left(\frac{6}{p}\right) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad p \equiv k \ (24) \text{ mit } k \in \{1, 5, 19, 23\}.$$

Aufgabe 6

Zeige: Ist $n > 1$ quadratfrei, so gilt

$$\sum_{d|n} \sigma(d^{k-1})\varphi(d) = n^k$$

für alle $k \geq 2$.

Aufgabe 7

Zeige: Keine der Zahlen

$$11, 111, 1111, 11111, \ldots$$

läßt sich als Summe zweier Quadrate schreiben.

Aufgabe 8

Für alle teilerfremden natürlichen Zahlen m und n zeige

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (mn).$$