Klausur in Elementarer Zahlentheorie, SoSe 2007

Aufgabe 1

Zeige, dass für alle $n > 1$ gilt: Falls $n^2 + 2$ prim ist, so ist n durch 3 teilbar.

Aufgabe 2

Bestimme alle Lösungen der Kongruenz

$$7x^2 + x + 22 \equiv 0 \ (60).$$

Aufgabe 3

Zeige: Ist $(m_1, m_2) = 1$ und $na \equiv nb \ (m_i)$ für $i = 1, 2$, so folgt

$$a \equiv b \ \left(\frac{m_1 m_2}{(m_1, n)(m_2, n)}\right).$$

Aufgabe 4

Sei $(m, n) = 1$. Zeige: Für jedes $z \in \mathbb{Z}$, $(z, mn) = 1$, existieren $x, y \in \mathbb{Z}$, $(x, n) = (y, m) = 1$, mit $z = xm + yn$.

Aufgabe 5

Für ungerade natürliche Zahlen x und m zeige: $\operatorname{ord}_{2m}(x) = \operatorname{ord}_m(x)$.

Aufgabe 6

Gilt $\omega(n) \cdot \mu^2(n) = 2$, so ist $n + 1 - \varphi(n)$ die Summe zweier Primzahlen.

Aufgabe 7

Sei $\lambda(n) := (-1)^{\Omega(n)}$. Zeige, dass gilt:

$$\sum_{d|n} \mu(d)\lambda(d) = 2^{\,\omega(n)}.$$

Aufgabe 8

Für $n > 1$ sei $A_n := 3^n - 2$. Zeige mit dem quadratischen Reziprozitätsgesetz für das Jacobi-Symbol:

$$\left(\frac{3}{A_n}\right) = 1 \Leftrightarrow n \text{ ungerade}.$$