Nachklausur in Elementarer Zahlentheorie, SoSe 2007

Aufgabe 1

Sei $n > 1$ und für alle Primzahlen $p \leq \sqrt[3]{n}$ gelte $p \nmid n$. Zeige durch Widerspruch, dass dann n entweder eine Primzahl oder das Produkt zweier Primzahlen ist.

Aufgabe 2

Bestimme alle Lösungen der Kongruenz

$$x^3 + 15x + 9 \equiv 0 \ (63).$$

Aufgabe 3

Zeige: Falls $na \equiv nb \ (m_i)$ für $i = 1, 2$, gilt:

$$a \equiv b \ \left(\frac{[m_1, m_2]}{(n, [m_1, m_2])} \right).$$

Aufgabe 4

Zeige:
Ist $2^k - 3$ prim, so genügt $n = 2^{k-1}(2^k - 3)$ der Gleichung $\sigma(n) = 2n + 2$.

Aufgabe 5

Für $m \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{Z}$ gelte $xy \equiv 1(m)$. Zeige:

$$\mathrm{ord}_m(x) = \mathrm{ord}_m(y).$$

Aufgabe 6

Zeige:
Falls $\omega(n) \cdot \mu^2(n) = 3$, so ist $\dfrac{\sigma(n) + \varphi(n)}{2} - n$ die Summe dreier Primzahlen.

Aufgabe 7

Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{d|n} 2^{\,\omega(d)} = d(n^2).$$

Aufgabe 8

Sei $n > 1$ ungerade und $A_n := 6^n - 1$. Zeige mithilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes für das Jacobi-Symbol, dass stets gilt:

$$\left(\frac{7}{A_n} \right) = 1.$$