Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 17.04.2007
Dr. K. Halupczok

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

SoSe 2007

Blatt 1

Abgabe: Dienstag, den 24.04.2007, zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1.

(a) Führe zur Berechnung von $(2378, 1769)$ den Euklidischen Algorithmus aus, rechne einmal mit kleinsten positiven Resten, und einmal mit absolut kleinsten Resten.

(b) Bestimme ganze Zahlen x, y, z, die der Gleichung $(385, 455, 637) = 385x + 455y + 637z$ genügen.

Aufgabe 2.

Zeige:

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$.
(b) Für $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $[x]\,[y] \leq [xy]$.

Aufgabe 3.

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(a) Für $(a, b) = 1$ gilt: $(2a + b, a + 2b) = 1$ oder 3

(b) $(a, b) = (b, a - cb)$. Berechne damit $(495, 210)$.

(c) $(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$

(d) $24 \mid (2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5)$

Aufgabe 4.

Ein *endlicher regulärer Kettenbruch* ist definiert als ein Bruch der Form:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_{m-1} + \frac{1}{a_m}}}}}$$

mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in \mathbb{N}$ für $i \geq 1$, wobei die a_i so beschaffen sein müssen, dass keiner der Nenner Null wird.

a) Zeige: Eine reelle Zahl kann genau dann als endlicher regulärer Kettenbruch geschrieben werden, wenn sie rational ist.
b) Zeige: Diese Darstellung ist sogar eindeutig, wenn $a_m > 1$ gefordert wird.
c) Gib diese eindeutige Darstellung für $\frac{2378}{1769}$ an.