Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Dr. K. Halupczok

24.04.2007

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

SoSe 2007

Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, den 03.05.2007, zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1.

(a) Jede natürliche Zahl der Form $4k+3$ hat einen Primteiler der Form $4l+3$.

(b) Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4l+3$.

Aufgabe 2.

(a) Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Primzahlen. Dann kann $P_n := p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ für kein $n \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl sein. (Hinweis: P_n ist stets von der Form $4k+3$)

(b) Es gibt beliebig große Intervalle ohne Primzahlen, d.h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es k aufeinanderfolgende natürliche Zahlen $a_1(k), a_2(k), ..., a_k(k)$, von denen keine prim ist.

Aufgabe 3.

(a) Ist $n > 4$ zusammengesetzt, so gilt: $n|(n-1)!$

(b) Im Jahr 1852 wurde von P.L. Tschebytschev das sogenannte *Bertrandsche Postulat* bewiesen. Dieses besagt, dass es für jedes $n > 1$ stets eine Primzahl p mit $n < p < 2n$ gibt. Zeige unter Verwendung dieser Aussage, dass $n!$ für kein $n \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl sein kann.

Aufgabe 4.

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $F_n := 2^{2^n} + 1$ die *n-te Fermatzahl*. Zeige:

(a) Für $n \geq 2$ lautet die letzte Ziffer von F_n stets 7.

(b) F_n kann für kein $n \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl sein. Verwende dazu Teilaufgabe a).

(c) $2^{2^n} - 1$ besitzt mindestens n verschiedene Primteiler.
(Hinweis: Zeige zunächst $2^{2^n} - 1 = F_0 \cdot F_1 \cdot ... \cdot F_{n-1}$)