Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 15.05.2007
Dr. K. Halupczok

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

SoSe 2007

Blatt 5

Abgabe: Dienstag, den 22.05.2007, zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1.

(a) Ist $n = 16.758.948.690$ durch 15, 99, 132 teilbar? Benutze die Teilbarkeitsregeln (Satz 2.11.).

(b) Bestimme die 2- und 3-adische Darstellung von 43.

(c) Sei n in der b-adischen Darstellung gegeben, also

$$n = a_m b^m + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

Zeige: $(b-1)|n$ genau dann, wenn $(b-1)|a_m + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$.

(d) Sei n in der 9-adischen Darstellung gegeben. Stelle, in Abhängigkeit von den Ziffern von n, Bedingungen für die Teilbarkeit von n durch 3 und durch 8 auf.

Aufgabe 2.

Bekanntlich lässt sich jedes $\alpha \in [\,0, 1\,)$ als Dezimalzahl

$$\alpha = 0, z_1 z_2 \cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu 10^{-\nu} \ (z_\nu \in \{0, \ldots, 9\})$$

schreiben. Die Darstellung ist eindeutig, wenn $z_\nu = 9$ ab einer Stelle ν_0 ausgeschlossen wird. Zeige: α ist genau dann rational, wenn die Folge (z_ν) ab einer Stelle periodisch ist.

Aufgabe 3.

(a) Ein zahlentheoretischer Zaubertrick: Der Zauberkünstler verbindet sich die Augen und bittet den Zuschauer eine siebenstellige ganze Zahl z_1 seiner Wahl aufzuschreiben, danach eine weitere ganze Zahl z_2, die durch eine beliebige Permutation der Ziffern von z_1 hervorgeht, und letztendlich die Differenz $z_1 - z_2$ zu bilden. Von diesem Ergebnis soll nun der Zuschauer eine frei gewählte Ziffer $\neq 9$ wegstreichen und dem Zauberkünstler die verbleibenden Ziffern vorlesen. Dieser nennt daraufhin die weggestrichene Ziffer. Wie konnte dies dem Zauberer gelingen? Beweise deine Erklärung des Tricks.

(b) Ein *Palindrom* ist eine Zahl deren Ziffern vorwärts und rückwärts gelesen dasselbe Muster ergeben (z.B. sind 373 und 521125 Palindrome). Beweise, dass jedes Palindrom, das aus einer geraden Anzahl von Ziffern besteht, durch 11 teilbar ist.

bitte wenden

Aufgabe 4.

Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen nach Axel Thue (1863-1922):

Seien k verschiedene Primzahlen $p_1 < \cdots < p_k$ gegeben, und für $x \geq 2$ sei $N = N(x, p_1, \ldots, p_k)$ die Anzahl der $n \leq x$, in deren Primfaktorzerlegung kein $p \neq p_1, \ldots, p_k$ vorkommt. Zeige:

(a) Es gibt ein $C = C(k) > 0$ mit $N \leq C \cdot (\ln x)^k$.

(b) Die Annahme, daß $p_1, \ldots, p_k$ alle Primzahlen sind, führt zum Widerspruch.