Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Dr. K. Halupczok

12.06.2007

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

SoSe 2007

Blatt 8

Abgabe: Dienstag, den 19.06.2007, zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1.

Entnimmt man einem Korb mit Eiern so oft wie möglich n Eier, so bleibt für $n = 2, 3, 4, 6$ jedesmal ein Ei übrig, für $n = 7$ jedoch keines. Bestimme die kleinstmögliche Anzahl von Eiern, die der Korb enthalten kann.

Aufgabe 2.

Das Polynom $x^2 - x + 41$ nimmt an den Stellen $x = 0, 1, \dots, 40$ nur Primzahlen als Werte an. (Hinweis: Zeige zunächst, dass -163 modulo allen ungeraden Primzahlen < 41 ein quadratischer Nichtrest ist und benutze dann die Identität: $4n^2 - 4n + 4 \cdot 41 = (2n-1)^2 + 4 \cdot 41 - 1$.)

Aufgabe 3.

(a) Bestimme alle Lösungen der Kongruenz $x^2 + 7x + 12 \equiv 0 \ (45)$.

(b) Die allgemeine quadratische Kongruenz

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \ (p), p \nmid a$$

mit dem Primzahlmodul $p \neq 2$ ist genau dann lösbar, wenn ihre Diskriminante $D := b^2 - 4ac$ die folgende Bedingung erfüllt:

$$\left(\frac{D}{p}\right) = 0 \text{ oder } 1$$

Bemerkung: Das Legendresymbol wird $= 0$ gesetzt, falls $p \mid (b^2 - 4ac)$.

Aufgabe 4.

Es sei $A = (a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von natürlichen Zahlen, die wir uns als Dezimalzahl vorgeben. Schreibt man die Ziffern von a_1 nacheinander hin, beginnend mit $0, **...$, hängt die von a_2 an, sodann die von a_3 usw, dann erhält man eine reelle Zahl $r_A \in [0, 1]$. Die Folge A habe die folgenden Eigenschaften:

(a) A ist schwach monoton steigend.

(b) Zu jedem $k \geq k_0$ existiert ein n, sodass $10^{k-1} \leq a_n < a_{n+1} \leq 10^k$

Zeige: r_A ist irrational.