Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 19.06.2007
Dr. K. Halupczok

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

SoSe 2007

Blatt 9

Abgabe: Dienstag, den 26.06.2007, zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1.

(a) Berechne $(\frac{71}{73})$ und bestimme die Lösungen der Kongruenz $x^2 \equiv 71(73)$ mit dem Algorithmus aus der Vorlesung.

(b) Bestimme die Lösungen der Kongruenz $2x^4 + 3x + 4 \equiv 0(175)$.

Aufgabe 2.

Sei (x, y, z) ein primitives pythagoräisches Tripel. Zeige:

$$x + y \equiv 1(8) \text{ oder } \equiv 7(8)$$
$$x - y \equiv 1(8) \text{ oder } \equiv 7(8)$$

(Hinweis: Benutze die Darstellung der Tripel aus Satz 4.1 und verwende, dass das Quadrat einer ungeraden Zahl stets die Form $8k + 1$ hat.)

Aufgabe 3.

Beweise: Ist im chinesischen Restsatz die Bedingung „$m_1, \ldots, m_k$ paarweise teilerfremd" verletzt, so hat das System

$$x \equiv x_j(m_j)\ ,\ j = 1, \ldots, k$$

entweder keine Lösung modulo $m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$ oder die Lösungsmenge ist die Vereinigung von mehr als einer Restklasse modulo $m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$.

bitte wenden

Aufgabe 4.

Ein topologischer Beweis der Unendlichkeit der Primzahlmenge nach H. Fürstenberg (1955).

Sei M eine nichtleere Menge und $\mathcal{O}$ eine Familie von Teilmengen von M. $(M, \mathcal{O})$ heißt *topologischer Raum*, wenn

(i) die Vereinigung beliebig vieler $O_i \in \mathcal{O}$ zu $\mathcal{O}$ gehört,

(ii) der Durchschnitt endlich vieler $O_i \in \mathcal{O}$ zu $\mathcal{O}$ gehört,

(iii) die leere Menge und M zu $\mathcal{O}$ gehören.

Die $O \in \mathcal{O}$ heißen *offene Mengen* und die $M \setminus O$, $(O \in \mathcal{O})$, heißen *abgeschlossene Mengen.*

Zeige:

(a) In einem topologischen Raum ist die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen.

(b) Sei $M = \mathbb{Z}$ und als offene Mengen werden beliebige Vereinigungen von Restklassen $a_i + m_i\mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ definiert. Dies liefert einen topologischen Raum.

(c) Jede Restklasse ist offen und abgeschlossen.

(d) Sei $A := \bigcup_{p \text{ prim}} (p\mathbb{Z})$. Dann ist A offen, aber nicht abgeschlossen.

(e) Die Annahme der Endlichkeit der Primzahlmenge führt mit d) zu einem Widerspruch.