Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 03.07.2007
Dr. K. Halupczok

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

SoSe 2007

Blatt 11

Abgabe: Dienstag, den 10.07.2007, zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1.

(a) Keine Primpotenz kann eine vollkommene Zahl sein.

(b) Keine Quadratzahl kann eine vollkommene Zahl sein.

(c) Ist n eine vollkommene Zahl, so gilt: $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$

(d) Das Produkt zweier Primzahlen ≥ 3 kann nie eine vollkommene Zahl sein.

Aufgabe 2.

(a) Die Zahl $d(n)$ ist genau dann ungerade, wenn n eine Quadratzahl ist.

(b) Hat $d(n)$ einen ungeraden Primteiler, so ist $\mu(n) = 0$.

(c) Ist $\sigma(n)$ prim, so ist auch $d(n)$ prim.

Aufgabe 3.
Die *Liouvillsche λ-Funktion* ist für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch $\lambda(n) := (-1)^{\Omega(n)}$.

(a) λ ist multiplikativ.

(b) Für jede natürliche Zahl n gilt: $\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ Quadratzahl} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 4.
Für jede natürliche Zahl n ist

$$(2^\omega * \lambda)(n) := \sum_{d|n} 2^{\omega(d)} \lambda(\frac{n}{d}) = 1$$

bitte wenden

Die folgenden Aufgaben dienen zur Klausurvorbereitung und sind freiwillig:

(1) Für $m, n \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$: Aus $ab \equiv cd\ (m)$, $b \equiv d\ (n)$, $(b, n) = 1$ folgt $a \equiv c\ ((m, n))$.

(2) Für $n \geq 1$ ist die Zahl $1! + 2! + \cdots + n!$ genau dann eine Quadratzahl, wenn $n = 1$ oder $n = 3$ ist.

(3) Ist $p > 2$ prim, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, p) = 1$, $\mathrm{ord}_p(a) = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, so folgt $a^k \equiv -1\ (p)$.

(4) Bestimme alle Lösungen der Kongruenz $x^3 + 9x - 4 \equiv 0\ (100)$.

(5) Sei $p > 5$ eine Primzahl. Zeige: $\left(\frac{6}{p}\right) = 1$ gdw. $p \equiv k\ (24)$ mit $k \in \{1, 5, 19, 23\}$.

(6) Ist $n > 1$ quadratfrei, so gilt $\sum_{d|n} \sigma(d^{k-1})\varphi(d) = n^k$ für alle $k \geq 2$.

(7) Keine der Zahlen $11, 111, 1111, 11111, \ldots$ läßt sich als Summe zweier Quadrate schreiben.

(8) Zeige für alle teilerfremden natürlichen Zahlen m und n: $m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1\ (mn)$.

(9) Zeige, daß für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $(2a + 1, 9a + 4) = 1$.
Zeige, daß für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: $(a, b) = [a, b] \Leftrightarrow a = \pm b$.

(10) Ist für $k \geq 1$ die k-te Fermatzahl $F_k = 2^{2^k} + 1$ prim, so gilt $\left(\frac{3}{F_k}\right) = -1$.

(11) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi(n) = 18$?

(12) Bestimme alle Lösungen der Kongruenz $x^3 - 4x - 5 \equiv 0\ (50)$.

(13) Sei $p > 3$ eine Primzahl. Zeige: $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ gdw. $p \equiv 1\ (6)$.

(14) Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt $n^k = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{t|d} t^k$

(15) Bestimme die kleinste positive ganze Zahl $a > 2$ mit $2 \mid a$, $3 \mid (a + 1)$, $4 \mid (a + 2)$, $5 \mid (a + 3)$, $6 \mid (a + 4)$.

(16) Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann genau dann als Differenz zweier Quadrate geschrieben werden, wenn sie das Produkt zweier Faktoren, die beide gerade oder beide ungerade sind, ist.