Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 10.07.2007
Dr. K. Halupczok

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

SoSe 2007

Blatt 12

Abgabe: Dienstag, den 17.07.2007, zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1.

Beweise:

(a) $\sum_{d|n} \sigma(d^{k-1})\varphi(d) = n^k$

(b) $d * \varphi = \sigma$

(c) Sei n ein Produkt von Primzahlzwillingen, also $n = p(p+2)$, dann ist: $\varphi(n)\sigma(n) = (n+1)(n-3)$

(d) Für $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$ gilt: $\varphi(n)\sigma(n) \geq n^2 \left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r^2}\right)$

Aufgabe 2.

Zeige: Für $x > 1$ ist $\pi(x) := \#\{p \leq x\} \geq \log_2 \log_2(x)$.

Aufgabe 3.

Für $|x| < 1$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \, \frac{x^n}{1 - x^n} = x \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \, \frac{x^n}{1 - x^n} = \frac{x}{(1-x)^2} \tag{2}$$

(Lambert-Reihen, Johann Heinrich L., 1728-1777).

Aufgabe 4.

Sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeige, dass gilt:

$$\sum_{\substack{a \leq x \\ (a,m)=1}} 1 = \frac{\varphi(m)}{m} \, x + \mathcal{O}_\epsilon(m^\epsilon) \qquad \forall\ \epsilon > 0$$

(*Hinweis:* Verwende die Aussage $d(m) = \mathcal{O}_\epsilon(m^\epsilon) \quad \forall\ \epsilon > 0$ (ohne Beweis) und die in der Vorlesung bewiesenen Faltungsidentitäten.)

Vorbereitungsliste zur Klausur elementare Zahlentheorie

1. ggT und kgV (Rechenregeln, verschiedene Darstellungsmöglichkiten, euklidischer Algorithmus)
2. Kongruenzrechnung
3. Die Eulersche φ-Funktion
4. Kongruenzen der Form $f(x) \equiv 0 \ (m)$
5. Jakobi-/Legendre-Symbol, Quadratisches Reziprozitätsgesetz
6. Euler- und Fermat-Kongruenz
7. Chinesischer Restsatz
8. Ordnung von a modulo m
9. Summe aus Potenzen
10. Definition und Eigenschaften von zahlentheoretischen Funktionen (μ, d, ω, Ω, σ, Λ, λ, $\ldots$)
11. Multiplikativität und Additivität zahlentheoretischer Funktionen