Übungen zur Analysis I, WWU Münster, Mathematisches Institut, WiSe 2015/16
P. Albers, K. Halupczok **Blatt Nr. 2**

Abgabe: Donnerstag, 5. November 2015, bis 08:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Aufgabe 1

Für $n, k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$ sei $M(n,k)$ die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, k Zahlen aus $\{1, \ldots, n\}$ so auszuwählen, dass darunter keine zwei benachbarten sind. (So ist beispielsweise die Auswahl $\{1,3,4,8\}$ verboten, da 3 und 4 benachbarte Zahlen sind.)

(a) Zeigen Sie: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k \leq n$ gilt die Gleichung

$$M(n+1,k) = M(n,k) + M(n-1,k-1).$$

Hinweis: Betrachten Sie die k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, welche das Element $n+1$ enthalten, und diejenigen, die $n+1$ nicht enthalten.

(b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $M(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ gilt.

Aufgabe 2

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\displaystyle (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$, (b) $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Aufgabe 3

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und seien $\ell, n \in \mathbb{N}$. Leiten Sie auf dreierlei Art eine Formel für $\displaystyle\sum_{k=\ell}^{n} x^k$ her, nämlich

(a) durch Zurückführung auf $\displaystyle x^\ell \cdot \sum_{k=\ell}^{n} x^{k-\ell}$, (b) durch Zurückführung auf $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-\ell} x^{k+\ell}$,

(c) durch Verwendung von $\displaystyle\sum_{k=\ell}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{\ell-1} x^k$.

Aufgabe 4

Wir wollen beweisen, daß alle natürlichen Zahlen gleich sind, z. B. $3 = 7$. Definiere dazu für $a, b \in \mathbb{N}$ das Maximum $\max(a,b)$ als die größere der beiden Zahlen a, b. Für $a = b$ ist $\max(a,b) := a = b$. Sei $\mathcal{A}_n$ die Aussage: „Falls $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max(a,b) = n$, dann $a = b$."

(i) **Induktionsanfang:** $\mathcal{A}_1$ ist wahr, denn aus $\max(a,b) = 1$ folgt $a = b = 1$.

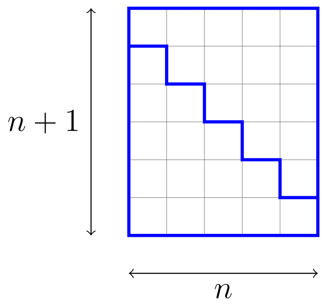
(ii) **Induktionsschluß:** Angenommen, $\mathcal{A}_n$ ist wahr für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max(a,b) = n+1$. Setze $\alpha = a-1$, $\beta = b-1$. Dann gilt $\max(\alpha, \beta) = n$, also $\alpha = \beta$, da $\mathcal{A}_n$ gilt. Damit folgt $a = b$, demnach gilt $\mathcal{A}_{n+1}$.

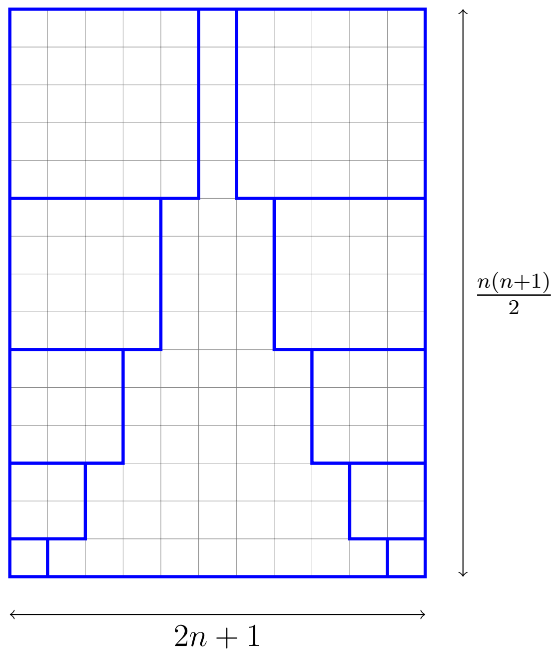
Seien nun $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig, $r := \max(a,b)$. Da $\mathcal{A}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt insbesondere $\mathcal{A}_r$, also $a = b$. Wo liegt der Trugschluß?

bitte wenden

$*$ Bonusaufgabe

Die Induktionsaufgabe in Aufgabe 2 (b) hat offensichtlich den Nachteil, daß man die Summenformel schon kennen muß, um sie zu beweisen. Leiten Sie die Formel $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ vom „kleinen Gauß“ und die Formel in Aufgabe 2 (b) mittels der folgenden Bilder her.





$*$ Knobelaufgabe

Gegeben sei ein reguläres Polygon mit n Seiten. Wie viele Dreiecke gibt es, deren Ecken auch Ecken des Polygons sind, aber deren Seiten keine Seiten des Polygons sind? Für $n = 7$ gibt es zum Beispiel sieben solche Dreiecke.