Übungen zur Analysis I, WWU Münster, Mathematisches Institut, WiSe 2015/16
P. Albers, K. Halupczok **Blatt Nr. 3**

Abgabe: Donnerstag, 12. November 2015, bis 08:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Aufgabe 1

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ definieren wir die Mengen

$$\begin{aligned} [a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}, & (a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}, \\ (-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R},\ a \geq x\}, & (-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R},\ a > x\}, \\ [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}, & [a,b) &:= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}, \\ (a,b] &:= \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}, & (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}. \end{aligned}$$

Alle diese Mengen heißen reelle *Intervalle*. Für $a = b$ sind die Mengen $[a,a)$, $(a,a]$ und (a,a) leer und es ist $[a,a] = \{a\}$. Schreiben Sie die folgenden Mengen als Vereinigung reeller Intervalle und beweisen Sie Ihr Ergebnis:

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\} \;\middle|\; \dfrac{x-1}{x^2-1} > x\right\}$,

(b) $\left\{x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\} \;\middle|\; \dfrac{1}{4} - \dfrac{x^2-1}{4x^2-1} < \varepsilon\right\}$ für beliebiges reelles $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 2

Leiten Sie aus den Axiomen von $\mathbb{R}$ die folgenden schon in der Vorlesung genannten Aussagen her. Dabei sind $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$.

1. $a > b,\ a' > b' \Longrightarrow a + a' > b + b'$
2. $a > b > 0,\ a' > b' > 0 \Longrightarrow aa' > bb'$
3. $-(-a) = a$
4. $(a^{-1})^{-1} = a$ für $a \neq 0$
5. $-(a+b) = -a - b$
6. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ für $ab \neq 0$
7. $-0 = 0$ und $1^{-1} = 1$
8. $a > 0 \Longrightarrow a^{-1} > 0$

Aufgabe 3

Für $x, y \in \mathbb{R}^+$ seien

$$A(x,y) := \frac{x+y}{2}, \qquad G(x,y) := \sqrt{xy}, \qquad H(x,y) := \frac{2}{x^{-1} + y^{-1}}$$

das sogenannte arithmetische, geometrische und harmonische Mittel von x und y.

(a) Man zeige aus den Anordnungsaxiomen: $H(x,y) \leq G(x,y) \leq A(x,y)$.

(b) Wenn man zunächst eine Wegstrecke s mit der Geschwindigkeit x zurücklegt, und dann nochmals eine Strecke s mit der Geschwindigkeit y, welches der obigen Mittel beschreibt dann die Durchschnittsgeschwindigkeit der Gesamtstrecke?

bitte wenden

Aufgabe 4

Leiten Sie aus den Körperaxiomen von $\mathbb{R}$ die folgenden Regeln für das Bruchrechnen her, wobei $\frac{a}{b} := ab^{-1}$ für $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$. Geben Sie bei jedem Schritt das verwendete Axiom an.

(i) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc \quad (b, d \neq 0)$

(ii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd} \quad (b, d \neq 0)$

(iii) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd} \quad (b, d \neq 0)$

(iv) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc} \quad (b, c, d \neq 0)$

$*$ **Bonusaufgabe**

Seien a_0 und b_0 reelle Zahlen mit $0 < b_0 \leq a_0$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ setze man

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}.$$

Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichungen

$$b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$$

gelten, sowie

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}.$$

$*$ **Knobelaufgabe**

Zwei ältere Damen verlassen ihr jeweiliges Heimatdorf bei Sonnenaufgang und gehen in Richtung des Dorfes der anderen. Beide gehen mit konstanter Geschwindigkeit. Um 12 Uhr mittags begegnen sie sich und gehen ohne anzuhalten aneinander vorbei. Die eine Dame erreicht das Dorf der anderen um 16 Uhr, die andere das der ersten um 21 Uhr. Wann ging an diesem Tag die Sonne auf?
Hinweis: Das intellektuelle Vergnügen bei dieser elementaren Aufgabe besteht darin, einen Ansatz zu finden, der sich sofort im Kopf durchrechnen läßt.