Übungen zur Analysis I, WWU Münster, Mathematisches Institut, WiSe 2015/16
P. Albers, K. Halupczok **Blatt Nr. 4**

Abgabe: Donnerstag, 19. November 2015, bis 08:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Aufgabe 1

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Ungleichungen?

(a) $|x^2 - 1| < 2x$,

(b) $\dfrac{|x-3|}{1-|x-1|} < 1$ für $x \neq 0, 2$.

Geben Sie Ihr Ergebnis als Vereinigung reeller Intervalle an und beweisen Sie es.

Aufgabe 2

Prüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen, und geben Sie diese Werte gegebenenfalls an.

(a) $\left\{ \dfrac{|x|}{1+|x|} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $\left\{ \dfrac{x}{1+x} \;\middle|\; x > -1 \right\}$

(c) $\left\{ x + \dfrac{1}{x} \;\middle|\; \dfrac{1}{2} < x \leq 2 \right\}$

(d) $\left\{ \dfrac{1}{(-3)^m} + \dfrac{n}{2n-1} \;\middle|\; m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N} \right\}$

Aufgabe 3

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß auch die Menge

$$A + B := \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$$

nach oben beschränkt ist, und daß gilt

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Aufgabe 4

(a) Seien $\ell, k \in \mathbb{N}_0$ und $A_0, \ldots, A_\ell, B_0, \ldots, B_k \in \mathbb{R}$. Weiter sei $a_n := A_\ell n^\ell + A_{\ell-1} n^{\ell-1} + \cdots + A_0$ und $b_n := B_k n^k + B_{k-1} n^{k-1} + \cdots + B_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $A_\ell, B_k \neq 0$.

Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ genau für $k \geq \ell$ konvergiert und dass dann

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \frac{A_\ell}{B_\ell}, & \text{falls } k = \ell, \\ 0, & \text{falls } k > \ell. \end{cases}$$

(b) Untersuchen Sie die beiden Folgen

$$i^n + \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

bitte wenden

* **Bonusaufgabe**

  Geben Sie explizit eine Bijektion zwischen dem offenen reellen Intervall $(0,1)$ und $\mathbb{R}$ an.

  Hinweis: Benutzen Sie in Ihrer Konstruktion keine Funktion, die in der Vorlesung noch nicht behandelt wurde, wie etwa die Funktion arctan.

* **Knobelaufgabe**

  (a) Das Hotel „Hilbert“ besitzt abzählbar unendlich viele Zimmer. Bei Ihrer Ankunft im Hotel sind diese leider alle schon belegt. Trotzdem findet die Rezeptionistin durch geschicktes Umverteilen der Gäste immer noch ein Zimmer für Sie, ohne daß ein Gast das Hotel verlassen oder mit einem anderen das Zimmer teilen muß. Wie geht das?

  (b) Jetzt kommt auch noch ein Reisebus der Canto(u)rs mit abzählbar unendlich vielen Reisenden an. Können diese auch noch untergebracht werden?