Übungen zur Analysis I, WWU Münster, Mathematisches Institut, WiSe 2015/16
P. Albers, K. Halupczok **Blatt Nr. 5**

Abgabe: Donnerstag, 26. November 2015, bis 08:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Grenzwert und die Häufungspunkte der reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sofern diese Werte existieren. Falls der Grenzwert existiert, bestimmen Sie zu $\varepsilon > 0$ explizit ein $N_0 \in \mathbb{N}$ so, daß die Folgenglieder ab N_0 höchstens um den Wert ε vom Grenzwert abweichen. Bestimmen Sie auch das Supremum und Infimum der Bilder der Folgen in $\mathbb{R}$.

$$a_n := \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \qquad b_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 1, & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases} \qquad c_n := (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n} + \frac{1}{n},$$

$$d_n := \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{falls es ein } k \in \mathbb{N} \text{ gibt mit } n = 3k, \\ 1 - \frac{1}{n}, & \text{falls es ein } k \in \mathbb{N}_0 \text{ gibt mit } n = 3k+1, \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & \text{falls es ein } k \in \mathbb{N}_0 \text{ gibt mit } n = 3k+2. \end{cases}$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie: Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0 :\ |a_{m+k} - a_m| < \varepsilon.$$

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie mit dem Cauchy-Kriterium, daß die durch

$$a_1 := 1,\ a_{n+1} := \frac{2 + a_n}{1 + a_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Hinweis: Beachten Sie, daß $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ der Folge.

Hinweis: 1.) Allgemein gilt: Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, so ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = c$,

2.) nutzen/beweisen Sie, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\frac{2+a_n}{1+a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ denselben Grenzwert haben.

* (c) Bestimmen Sie mit den Ideen dieser Aufgabe den Grenzwert von

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\dots}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}.$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie mit dem Cauchy-Kriterium

(a) die Divergenz der harmonischen Reihe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ für $n \in \mathbb{N}$,

(b) die Konvergenz der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$ für $n \in \mathbb{N}$, (Hinweis: Schreiben Sie $b_n - b_m$ als Differenz zweier Abschnitte der harmonischen Reihe.)

(c) die Konvergenz der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

bitte wenden

* **Bonusaufgabe**

Zeigen Sie, dass die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus der Bonusaufgabe von Blatt 3 gegen einen gemeinsamen Grenzwert $M = M(a_0, b_0)$ konvergieren.
Zeigen Sie weiter, dass die Abschätzung

$$|a_{n+1} - M| \le C|a_n - M|^2 \qquad \text{(und ebenso } |b_{n+1} - M| \le C|b_n - M|^2\text{)}$$

für eine reelle Zahl $C > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Bemerkung:

(1) Die Abschätzung bedeutet, daß in jedem Schritt von n nach $n+1$ ungefähr eine Verdopplung der korrekten Nachkommastellen der Folgenglieder mit denen des Grenzwertes erzielt wird.

(2) Für die Startwerte $a_0 := 1$, $b_0 := \frac{1}{\sqrt{2}}$ wird $c_n := \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$ und

$$\pi_n := \frac{2a_{n+1}^2}{1 - \sum_{k=0}^{n} 2^k c_k^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gesetzt, und es kann

$$0 < \pi - \pi_{n+1} \le \frac{(\pi - \pi_n)^2}{2^{n+1}\pi^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden. Die Methode gehört zu den am schnellsten konvergierenden numerischen Berechnungen von π, die bekannt sind.

* **Knobelaufgabe**

Betrachten Sie die harmonische Reihe, in der diejenigen Summanden gestrichen werden, deren Nenner die Ziffer 9 in ihrer Dezimaldarstellung enthalten. Zeigen Sie, dass die so entstandene Teilreihe konvergiert.
Hinweis: Zeigen Sie erst, daß die Anzahl der Summanden, deren Nenner zwischen $10^{m-1} - 1$ und $10^m - 1$ liegen, gleich $9^m - 9^{m-1}$ ist. Damit kann der Reihengrenzwert nach oben durch einen endlichen Wert abgeschätzt werden.