Übungen zur Analysis I, WWU Münster, Mathematisches Institut, WiSe 2015/16
P. Albers, K. Halupczok **Blatt Nr. 6**

Abgabe: Donnerstag, 03. Dezember 2015, bis 08:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Aufgabe 1

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $(0,1)\cap\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt durch Überprüfen der Definition, und geben Sie konkret eine Teilfolge mit Grenzwert 1 bzw. 0 an.

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgende Charakterisierung des Limes Inferior:
Es gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = b \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

i) $a_n > b - \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$,

ii) $a_n < b + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Diese Aussage ist Teil 2) von Satz 10 der Vorlesung. Beweisen Sie diese nach dem Vorbild des Beweises zu Teil 1) des Satzes unter Beachtung der zu ergänzenden Beweisschritte.

Aufgabe 3

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$,

(b) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ sind Häufungspunkte der Folge,

(c) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{c \in \mathbb{R} \mid c \text{ ist Häufungspunkt von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$.

(Entsprechendes gilt für den $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, ist nicht zu zeigen.)

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und beweisen Sie Ihre Behauptung:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leq 1, \\ 0, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$

(b) $f_2 : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leq 1, \\ 0, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) := |x|$.

bitte wenden

$*$ **Bonusaufgabe**

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend*, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Implikation $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ gilt.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und $M \subset \mathbb{R}$ von oben beschränkt. Zeigen Sie, daß dann auch $f(M)$ von oben beschränkt ist und $\sup(f(M)) \leq f(\sup(M))$ gilt.

(b) Geben Sie eine monoton wachsende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine von oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ so an, daß $\sup(g(M)) < g(\sup(M))$ gilt.

(c) Geben Sie eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine von oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ so an, daß $h(M)$ von oben beschränkt ist, aber $\sup(h(M)) > h(\sup(M))$ gilt.

$*$ **Knobelaufgabe**

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Wir nennen $f : D \to D$ eine *Kontraktion*, falls $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ für alle $x, y \in D$ mit $x \neq y$ gilt.

Lipschitz-stetige Funktionen $f : D \to D$ mit Lipschitz-Konstanten $L < 1$ sind Kontraktionen. Belegen Sie mit einem Beispiel, dass dies umgekehrt nicht der Fall sein muß.