Übungen zur Analysis I, WWU Münster, Mathematisches Institut, WiSe 2015/16
P. Albers, K. Halupczok **Blatt Nr. 7**

Abgabe: Donnerstag, 10. Dezember 2015, bis 08:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Aufgabe 1

(a) Geben Sie eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, und eine konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit Grenzwert $x_0 \in D$ so an, daß $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, aber f nicht stetig in x_0 ist. Warum widerspricht dies nicht dem Folgenkriterium für Stetigkeit?

(b) Untersuchen Sie die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

auf Stetigkeit in $x_0 = 0$.

Aufgabe 2

Erinnerung: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, heißt *stetig* genau dann, wenn gilt:

$$\forall\, x_0 \in D\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0\ \forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Hängt δ dabei *nicht* von x_0 ab, heißt die Funktion *gleichmäßig stetig*.

Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$, ist gleichmäßig stetig,
nicht aber die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$.

Aufgabe 3

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\overset{\circ}{M} = M \setminus \partial M$ ist offen.

(b) Für jede offene Menge U mit $U \subset M$ gilt $U \subset M \setminus \partial M = \overset{\circ}{M}$.

(c) Es gilt $\overset{\circ}{M} = \bigcup \{U \subset \mathbb{R}^n \mid U \subset M \text{ und } U \text{ offen}\}$.

Bemerkung (ist nicht zu zeigen): Analog gilt:
(a) $\overline{M} = M \cup \partial M$ ist abgeschlossen,
(b) A abgeschlossen und $M \subset A \Rightarrow \overline{M} \subset A$,
(c) $\overline{M} = \bigcap \{A \subset \mathbb{R}^n \mid M \subset A \text{ und } A \text{ abgeschlossen}\}$.

Aufgabe 4

Geben Sie die Randmenge ∂M folgenden Teilmengen M von $\mathbb{R}^2$ an und entscheiden Sie, ob M offen und ob M abgeschlossen ist.

(a) $M_1 = B_1((0,0)) \setminus \{(0,0)\}$

(b) $M_2 = [1,2] \times [3,4)$

(c) $M_3 = \{x \in [1,2] \times [3,4] \mid x \in \mathbb{Q}^2\}$

(d) $M_4 = [1,2) \times \{0\}$

bitte wenden

∗ **Nikolausaufgabe**

Der Nikolaus hängt Kugeln ($\circ$) und Lametta ($-$) an eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^2$ so, daß die Mengen

$$T, \quad \mathring{T}, \quad \overline{T}, \quad \mathring{\overline{T}}, \quad \overline{\mathring{T}}, \quad \overline{\mathring{\overline{T}}}, \quad \mathring{\overline{\mathring{T}}},$$

alle verschieden sind. Geben Sie eine solche Menge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ explizit an.