Abgabe: Donnerstag, 17. Dezember 2015, bis 08:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Aufgabe 1

Entscheiden Sie für die folgenden Teilmengen $K_1, \dots, K_4$ des $\mathbb{R}$, ob diese kompakt sind.

(a) $K_1 := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

(b) $K_2 := f([0,1])$ unter der Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{x^2 - 6x + 7}{x + 3}$

(c) $K_3 := \{\frac{1}{x} \mid x \in (0,1]\}$

(d) $K_4 := \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [-\dfrac{1}{n}, 1]$

Aufgabe 2

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so,

(a) daß das Urbild einer zusammenhängenden Menge nicht wieder zusammenhängend ist,
(b) daß das Bild einer offenen Menge nicht wieder offen ist,
(c) daß das Bild einer abgeschlossenen Menge nicht wieder abgeschlossen ist,
(d) daß das Urbild einer kompakten Menge nicht wieder kompakt ist.

Aufgabe 3

(a) Sei $d \in \mathbb{N}$ fest und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $K_n \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte, nichtleere Menge und es gelte $K_{n+1} \subset K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ gilt.

(b) Geben Sie $d \in \mathbb{N}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene, nichtleere Menge $A_n \subset \mathbb{R}^d$ so an, daß $A_{n+1} \subset A_n$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 4

Beweisen Sie Lemma 4': Sei $n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt:

$$M \subset D \text{ offen in } D \iff \forall\, x \in M\ \exists\, r > 0 : B_r(x) \cap D \subset M.$$

bitte wenden

∗ **Bonusaufgabe**

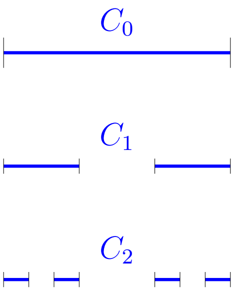
Sei $C_0 := [0,1]$, und ist

$$C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$$

gegeben mit 2^n disjunkten abgeschlossenen Intervallen $I_{n,k}$ der Länge 3^{-n}, so sei C_{n+1} definiert als Vereinigung aller disjunkten abgeschlossenen Intervalle $I_{n+1,2k-1}$, $I_{n+1,2k}$, die durch Entfernung des offenen mittleren Drittels aus $I_{n,k}$ von C_n entstehen, d. h.

$$C_{n+1} := \bigcup_{k=1}^{2^n} (I_{n+1,2k-1} \cup I_{n+1,2k}) = \bigcup_{k=1}^{2^{n+1}} I_{n+1,k}.$$

Skizze:



...

Auf diese Art wird rekursiv eine Folge $C_0, C_1, \ldots$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert, und wir setzen $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Diese Menge heißt *Cantor Menge*.

Zeigen Sie:

(a) $C = \partial C$,

(b) C ist überabzählbar
(etwa durch Angabe einer Bijektion zwischen C und der Menge aller 0-1-Folgen),

(c) jeder Punkt von C ist Häufungspunkt von C,

(d) die Gesamtlänge von C_n geht für $n \to \infty$ gegen 0.