Übungen zur Analysis I, WWU Münster, Mathematisches Institut, WiSe 2015/16
P. Albers, K. Halupczok **Blatt Nr. 9**

Abgabe: Donnerstag, 14. Januar 2016, bis 08:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Aufgabe 1

Begründen Sie, warum die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^{p/q} \end{aligned}$$

für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie ihre Ableitung

(a) mittels der Darstellung $f(x) = (x^{1/q})^p$,

(b) aus der Identität $(f(x))^q = x^p$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 \cos(1/x), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

differenzierbar ist, aber nicht stetig differenzierbar, d. h. die Ableitung ist keine stetige Funktion. (In der Vorlesung wird gezeigt, daß sin und cos differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind mit $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.)

Aufgabe 3

(a) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

(i) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$,

(ii) $[0, \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$,

(iii) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$.

Was ist das Bild dieser Funktionen?

(b) Begründen Sie, warum auf dieser Bildmenge die Umkehrfunktionen

$$\arcsin := \sin^{-1}, \ \arccos := \cos^{-1}, \ \arctan := \tan^{-1}$$

existieren. Hier steht arc für arcus, d. h. Bogen. So ist z. B. $\arcsin y$ der Winkel x (in Radian) mit $\sin x = y$, wobei das Radianmaß eines Winkels per Definition gleich der entsprechenden Bogenlänge auf dem Einheitskreis ist.

(c) Bestimmen Sie die Ableitung der Tangensfunktion.

(d) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen arcsin, arccos und arctan.

Aufgabe 4

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f genau dann injektiv, wenn f streng monoton ist.