Übungen zur Analysis I, WWU Münster, Mathematisches Institut, WiSe 2015/16
P. Albers, K. Halupczok **Blatt Nr. 10**

Abgabe: Donnerstag, 21. Januar 2016, bis 08:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Aufgabe 1

Es sei $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine *beschränkte Umordnung*, d. h. τ sei bijektiv und es gebe ein $d \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|\tau(n) - n| \leq d \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweisen Sie (ohne Anwendung des Umordnungssatzes): Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, die $a_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, konvergiert genau dann absolut, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ absolut konvergiert.

Aufgabe 2 (Wurzelkriterium)

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Es gebe ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta \text{ für alle } n \geq n_0.$$

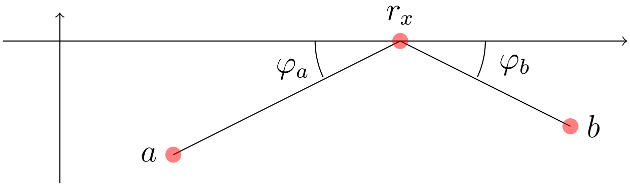
Zeigen Sie, daß die Reihe dann absolut konvergiert.

(b) Es sei $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Zeigen Sie, daß die Reihe dann absolut konvergiert.

Aufgabe 3

Die beiden Punkte $a, b \in \mathbb{R}^2$ verbindet ein Lichtstrahl, der an einem Spiegel in x-Richtung in einem Punkt $r_x = (x, 0) \in \mathbb{R}^2$ reflektiert wird. Sei $L(x)$ die Länge des zurückgelegten Weges des Lichtstrahls, also $L(x) = |r_x - a| + |r_x - b|$, und seien φ_a und φ_b die Winkel $\in [0, \frac{\pi}{2}]$, die der Lichtstrahl in Richtung a und b mit dem Spiegel einschließt.

Skizze:



Wie in der Skizze zu sehen, brauchen die Punkte a und b nicht dieselbe y-Koordinate zu haben.

(a) Zeigen Sie: $L'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi_a = \varphi_b$

(b) Liegt bei x mit $L'(x) = 0$ ein Maximum oder Minimum der Funktion $L(x)$ vor?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos\frac{x}{2}}{1 - \cos x} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x}$$

Hinweis: Verwenden Sie, daß die Regel von de l'Hospital mehrfach angewendet werden kann. Überprüfen Sie bei der Anwendung, daß die Voraussetzungen der Regel auch erfüllt sind (beachten Sie dazu die Bonusaufgabe auf der Rückseite).

bitte wenden

∗ **Bonusaufgabe**

Welche Probleme ergeben sich bei der Bestimmung der folgenden Grenzwerte nach der de l'Hospitalschen Regel? Wie kann man diese umgehen?

$$\text{(i)}\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x + \cos x}{x} \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x}$$

(a) Zeigen Sie, daß der Grenzwert in (i) nicht existiert, obwohl ein unkritisches Anwenden der Regel von de l'Hospital in (i) auf einen Quotienten führt, welcher für $x \to 0$ gegen 1 geht. Welche der Voraussetzungen des Satzes von der Regel von de l'Hospital ist hier nicht erfüllt?

(b) Zeigen Sie, daß ein Versuch mit der Regel von de l'Hospital bei (ii) ins Leere läuft, und auf anderem Wege, daß der gesuchte Limes in (ii) gleich 0 ist.

(c) Formulieren Sie die Regel von de l'Hospital für einen Grenzwert mit $x \to \infty$ und einem Quotienten, in dem Zähler und Nenner gegen ∞ gehen.

(d) Für $f(x) = x + \sin x \cos x$, $g(x) = f(x)e^{\sin x}$ ist $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ nicht existent, obwohl

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cos x}{x + \sin x\cos x + 2\cos x} e^{-\sin x} = 0.$$

Welcher Fehler wird hier bei der Argumentation mit der de l'Hospital-Regel begangen?