Übungen zur Analysis I, WWU Münster, Mathematisches Institut, WiSe 2015/16
P. Albers, K. Halupczok **Blatt Nr. 11**

Abgabe: Donnerstag, 28. Januar 2016, bis 08:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Aufgabe 1

Beweisen Sie die allgemeinen Potenzgesetze: Sei $a > 0$, dann gilt:

(a) $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist stetig.

(b) $a^{x+y} = a^x a^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ für alle $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, $p \in \mathbb{Z}$.

(d) $(a^x)^y = a^{xy}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(e) $a^x b^x = (ab)^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

(f) $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie weiter, daß die Ableitung von a^x existiert und berechnen Sie diese.

Aufgabe 2

Es sei $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der Logarithmus zur Basis a, d. h. die Umkehrfunktion der Funktion $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $a > 0$.

(a) Zeigen Sie, daß $\log_a(x) = \dfrac{\log x}{\log a}$ für alle $x > 0$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung von $\log_a(x)$, einmal durch Verwendung des Satzes von der Ableitung einer Umkehrfunktion und einmal durch Ableitung der Gleichung in (a).

Aufgabe 3

Zeigen Sie, daß die Identität $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ auf $[0, 1]$ integrierbar ist und $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ gilt.
Hinweis/Bemerkung:

(a) Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung der Form

$$Z_n = (0 = x_0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1 = x_n)$$

mit $O(Z_n, \mathrm{id}) - U(Z_n, \mathrm{id}) < \varepsilon$.

(b) id ist auf allen Intervallen $[a, b]$ integrierbar und $\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

Aufgabe 4

Verwenden Sie den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen, um folgenden *Mittelwertsatz der Integralrechnung* zu zeigen: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$