Übungen zur Analysis I, WWU Münster, Mathematisches Institut, WiSe 2015/16
P. Albers, K. Halupczok **Übergangsblatt**

Präsenzblatt OHNE ABGABE, nur zur Besprechung
in der 2. Vorlesungswoche des Sommersemesters 2016 in den Übungen zur Analysis II

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel:

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{2e^x}{5+2e^x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_e^{e^{\pi/2}} \frac{\cos(\log x)}{x\sin(\log x)}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$ mit $x = \frac{\pi}{2} - t$

(d) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\arctan(e^2)} \frac{dx}{\sin x}$ mit $x = 2\arctan t$

Aufgabe 2

Verwenden Sie partielle Integration, um die folgenden Integrale zu berechnen:

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{3x-4}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(nx)\cos(nx)\,dx$ mit $n \in \mathbb{N}$

(c) $\displaystyle\int_a^b \log x\,dx$ für $a, b \in \mathbb{R}$

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{e^2-1}} \arctan x\,dx$

Hinweis zu (c) und (d): $\log x = 1 \cdot \log x$, $\arctan x = 1 \cdot \arctan x$.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Es ist $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, und für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $f^{(k)}(0) = 0$.

Aufgabe 4

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Funktionsvorschrift

$$f_1(x) := \sin(x) \text{ und } f_{n+1}(x) := \sin(f_n(x)).$$

Zeigen Sie: Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f = 0$, alle f_n und f sind C^∞-Funktionen, aber f_n' konvergiert nicht (punktweise) gegen f' (man betrachte $x = 0$).

Bonusaufgabe

Sei $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch die folgenden Eigenschaften:

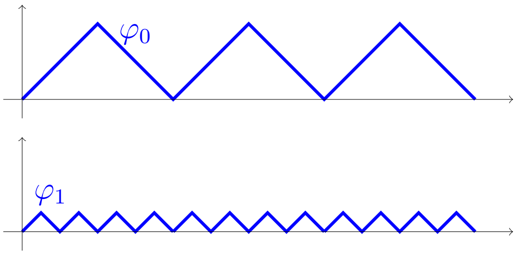
(a) Es ist $\varphi_0(x) = \varphi_0(x+2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Es ist $\varphi_0(x) = x$ für $x \in [0,1)$.

(c) Es ist $\varphi_0(x) = 2 - x$ für $x \in [1,2)$.

Dann ist φ_0 stetig auf $\mathbb{R}$, hat die Periode 2 und es gilt $0 \leq \varphi_0(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir φ_n durch $\varphi_n(x) = \frac{\varphi_0(4^n x)}{4^n}$.

Skizze:



...

Zeigen Sie, daß $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ eine stetige Funktion ist.

Bemerkung: Man kann (mit einigem Aufwand) zeigen, daß f nirgends differenzierbar ist.

Knobelaufgabe

Auf wieviele Arten läßt sich ein Euro in Kleingeld umwechseln? Als Kleingeld kommen in Betracht: 1-, 2-, 5-, 10-, 20- und 50-Cent-Stücke.
Hinweis: Die gesuchte Zahl ist der Koeffizient des Monoms x^{100} eines Polynoms, welches das Produkt von 6 geeigneten endlichen Potenzreihen ist.