Entwürfe für Klausuraufgaben zur Analysis I, WWU Münster,
Mathematisches Institut, WiSe 2015/16
P. Albers, K. Halupczok

Beispielhafte Lückentextaufgaben:

1.1 Ist $a \geq 0$ reell und $a \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $a =$ ______.

1.2 Eine Teilmenge K des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie ________________ und ________________ ist.

1.3 Eine stetige, aber nicht gleichmäßig stetige Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) :=$ ______.

Zwei repräsentative Übungsaufgaben:

Aufgabe 1
Untersuchen Sie die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

auf Stetigkeit in $x_0 = 0$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Grenzwert und die Häufungspunkte der reellen Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sofern dieser Wert existiert. Falls der Grenzwert existiert, bestimmen Sie zu $\varepsilon > 0$ explizit ein $N_0 \in \mathbb{N}$ so, daß die Folgenglieder ab N_0 höchstens um den Wert ε vom Grenzwert abweichen. Bestimmen Sie auch das Supremum und Infimum des Bildes der Folge in $\mathbb{R}$.

$$d_n := \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{falls es ein } k \in \mathbb{N} \text{ gibt mit } n = 3k, \\ 1 - \frac{1}{n}, & \text{falls es ein } k \in \mathbb{N}_0 \text{ gibt mit } n = 3k + 1, \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & \text{falls es ein } k \in \mathbb{N}_0 \text{ gibt mit } n = 3k + 2. \end{cases}$$

Zu Lemma 14 samt Beweis und notwendiger Definitionen

Erinnerung an Lemma 14

Das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend. D.h. ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $D \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, dann ist auch $f(D)$ zusammenhängend.

Aufgabe 3

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend. Zeigen Sie, daß die Menge

$$\left\{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ mit } (x, y) \in D \right\} \subset \mathbb{R}$$

zusammenhängend ist.