OHNE ABGABE, Besprechung mit Tutor_inn_en nach Vereinbarung am 11./12./13. Januar

Aufgabe 1

Schreiben Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen:

(a) $A := \{x \in \mathbb{R};\ |x+2| < |x+7|\}$,

(b) $B := \{x \in \mathbb{R};\ \frac{x}{x+2} > \frac{x+3}{3x+1}\}$,

(c) $C := \{x \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N} : x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} > x^n + \frac{1}{x^n}\}$,

(d) $D := \{\frac{x}{x+1};\ x \in \mathbb{R},\ x > -1\}$.

Bestimmen Sie auch Supremum/Infimum/Maximum/Minimum der Mengen A bis D, falls existent.

Aufgabe 2

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$

(b) $|x-y| \geq |x| - |y|$

(c) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

(d) $3\sqrt[3]{xyz} \leq x + y + z$, falls $x, y, z > 0$

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist das Polynom $x^{2n-1} + 1$ durch $x + 1$ teilbar.

(b) Sei A_n das arithmetische Mittel der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}.$$

Zeigen Sie, daß $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} = 2$ gilt.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Grenzwerte der angegebenen Folgen:

$$a_n := \frac{3n^2 - 5n}{6n^2 + 3n - 2},\ b_n := \frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1},\ c_n := \sqrt{n+2} - \sqrt{n},$$
$$d_n := \left(\frac{2n+1}{3n-4}\right)^4,\ e_n := \frac{1}{n}(g_1 + \cdots + g_n) \text{ mit } g_n := \frac{1}{2}(1 + (-1)^n),$$
$$f_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(f_n + \frac{p}{f_n}\Big) \text{ mit } p, f_1 > 0.$$

bitte wenden

Aufgabe 5

Zeigen Sie:

(a) Jede konvergente reelle Folge ist beschränkt.

(b) Für jede konvergente reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $A \neq 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| > A/2$ für alle $n \geq N$.

(c) Jede konvergente reelle Folge besitzt entweder ein Maximum oder ein Minimum oder beides.

(d) Für jede reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: Ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 6

Geben Sie den größten Bereich $D \subset \mathbb{R}$ an, so daß die folgenden Funktionenvorschriften eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definieren.

(a) $\sqrt{(-x+3)(2x+4)}$, (b) $(x-2)(x^2-4)^{-1}$, (c) $\frac{\sin 3x}{\cos 2x}$, (d) $2^{\sqrt{x^2-1}}$.

Aufgabe 7

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$, und es sei $\lim_{x\to a} f(x) = B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\delta > 0$, so daß $|f(x)| > \frac{1}{2} \cdot |B|$ für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ gilt.

Aufgabe 8

Für welche Werte des Definitionsbereiches sind die folgenden Funktionen stetig?

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ (b) $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{3+\sin x}$ (c) $f(x) = \dfrac{x-|x|}{x}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x}, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ (e) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ (f) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$, $f(0) = 1$

Aufgabe 9

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und seien die Funktionen f/g und g stetig in $x = a$. Zeigen Sie, dass dann auch f in a stetig ist.

Aufgabe 10

(a) Bestimmen Sie eine nicht kompakte Menge $D \subset \mathbb{R}$ und eine unbeschränkte stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie eine nicht kompakte Menge $D \subset \mathbb{R}$ und eine beschränkte stetige Funktion $g : D \to \mathbb{R}$, die kein Maximum besitzt.