Übungen zur Analysis 1 **Blatt 1**
Lohkamp, Iniotakis, Halupczok **WS 11/12**

Abgabe: Freitag, 21. Oktober 2011, bis 12.00 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 - Präsenzaufgabe (3+1 Übungspunkte):

(i) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ die *binomische Formel* gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

(ii) Folgern Sie die *Bernoullische Ungleichung*, nach der für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$, gilt:

$$(1+a)^n \geq 1 + n\,a.$$

Aufgabe 2 - Präsenzaufgabe (3+1 ÜP):

(i) Zeigen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen $r_1, \ldots, r_n$ die folgende Ungleichung zwischen *arithmetischem Mittel* (Term links) und *geometrischem Mittel* (Term rechts) gilt:

$$\frac{r_1 + \ldots + r_n}{n} \geq \sqrt[n]{r_1 \cdot \ldots \cdot r_n}\,.$$

(ii) Folgern Sie: Unter allen Quadern mit einem gegebenen Volumen $V > 0$ hat der Würfel die kleinste Kantenlängensumme.

(Sie dürfen dabei für alle positiven reellen x, y annehmen, daß $y \geq \sqrt[n]{x}$ äquivalent ist zu $y^n \geq x$.)

Aufgabe 3 (4 ÜP):

Zeigen Sie: $\sqrt[3]{3}$ ist irrational.

Aufgabe 4 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

Die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der *Fibonacci-Zahlen* ist induktiv definiert durch

$$F_n := \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ 1 & \text{für } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{für } n \geq 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$