

Abgabe: Freitag, 28. Oktober 2011, bis 12.00 Uhr in die jeweiligen Kästen

---

**Aufgabe 5 - Präsenzaufgabe (2+2 ÜP):**

- (i) Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Menge

$$M_1 := \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ mit } 1/2 < (x-1)^2 \leq 2\}.$$

Hat  $M_1$  ein Minimum oder ein Maximum?

- (ii) Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Menge

$$M_2 := \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

Hat  $M_2$  ein Minimum oder ein Maximum?

**Aufgabe 6 - Präsenzaufgabe (1+2+1 ÜP):**

- (i) Zeigen Sie, daß  $\mathbb{Q}$  nicht vollständig ist.  
(ii) Zeigen Sie: Die Teilmenge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{q \in \mathbb{R} \mid q = a + b\sqrt{2} \text{ mit } a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

ist ein Unterkörper von  $\mathbb{R}$ .

- (iii) Ist  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  angeordnet? Ist  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  vollständig? Begründen Sie Ihre Antworten.

**Aufgabe 7 (4 ÜP):**

Zeigen Sie, daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2.$$

**Aufgabe 8 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):**

Zeigen Sie: Die Menge  $\mathbb{K} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) &:= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ (a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) &:= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)\end{aligned}$$

ist ein Körper.