Übungen zur Analysis 1 — **Blatt 3**
Lohkamp, Iniotakis, Halupczok — **WS 11/12**

Abgabe: Freitag, 4. November 2011, bis 12.00 Uhr in die jeweiligen Kästen

---

Aufgabe 9 - Präsenzaufgabe (2+2 ÜP + 1 Bonuspunkt):

(i) Gegeben seien die Funktionen $\alpha : x \mapsto 2x$, $\beta : x \mapsto x+1$ und $\gamma : x \mapsto x^2$. Bestimmen Sie:

a.) $\alpha \circ \beta$ b.) $\beta \circ \alpha$ c.) $\beta \circ \gamma \circ \alpha \circ \alpha$ d.) $\gamma \circ \beta \circ \alpha$.

(ii) Gegeben seien die Funktionen $\alpha : x \mapsto x+1$, $\beta : x \mapsto x^2$ und $\gamma : x \mapsto x^{-1}$. Schreiben Sie die folgenden Funktionen als (eventuell mehrfache) Verknüpfung von α, β und γ:

a.) $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$ b.) $f_2 : x \mapsto x^2 + 2x + 2$

c.) $f_3 : x \mapsto x^2 + 6x + 9$ d.) $f_4 : x \mapsto \dfrac{x+2}{x+1}$.

(iii) $K := \{f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c \,\big|\, c \in \mathbb{R}\}$ sei die Menge aller konstanten Funktionen. Zeigen Sie:

Wenn $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit allen $f_c \in K$ kommutiert (d.h. g erfüllt $g \circ f_c = f_c \circ g$ für alle $f_c \in K$), dann ist g die Identitätsabbildung $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$.

Aufgabe 10 - Präsenzaufgabe (2+2 ÜP):

(i) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$: Die Polynomabbildung $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{2n} + x^n$ ist weder injektiv, noch surjektiv.

(ii) Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a.) f ist surjektiv genau dann, wenn f ein Rechtsinverses $r : Y \to X$ hat.

b.) f ist injektiv genau dann, wenn f ein Linksinverses $l : Y \to X$ hat.

(Merke: "**r**echtsinvers $\Leftrightarrow$ su**r**jektiv", "**lin**ksinvers $\Leftrightarrow$ **in**jektiv").

Aufgabe 11 (4 ÜP):

Zeigen Sie $\max(x,y) = \frac{1}{2}\big(x + y + |x-y|\big)$ und $\min(x,y) = \frac{1}{2}\big(x + y - |x-y|\big)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

Zeigen Sie: Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, \exists\, b, c \in \mathbb{Q} : x^2 + bx + c = 0\}$ ist abzählbar.