Übungen zur Analysis 1 **Blatt 4**
Lohkamp, Iniotakis, Halupczok **WS 11/12**

Abgabe: Freitag, 11. November 2011, bis 12.00 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 13 - Präsenzaufgabe (2+2 ÜP):

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge reeller Zahlen. Schreiben Sie die folgenden Aussagen formal mit Hilfe der Quantoren $\forall$ und $\exists$ und negieren Sie sie:

(a) Es gibt einen Grenzwert $\bar{a} \in \mathbb{R}$, bei dem zu jeder gegebenen Genauigkeit $\varepsilon > 0$ ein erster Folgenindex $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle nachfolgenden Folgenindizes $n \in \mathbb{N}$, die grösser oder gleich $n_0(\varepsilon)$ sind, gilt: $|\,\bar{a} - a_n\,| < \varepsilon$.

(b) Für jede Genauigkeit $\varepsilon > 0$ gibt es einen ersten Folgenindex $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle nachfolgenden Folgenindizes $n, m \in \mathbb{N}$, die grösser oder gleich $n_0(\varepsilon)$ sind, gilt: $|\,a_m - a_n\,| < \varepsilon$.

(ii) Zeigen Sie: Aus Aussage (i.a) folgt Aussage (i.b).

Aufgabe 14 - Präsenzaufgabe (2+2 ÜP):

(i) Es sei $Z^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass durch $R \subset (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$ mit

$$(a,b) \sim_R (c,d) \;:\Longleftrightarrow\; a\,d = b\,c$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definiert wird.

(ii) Es sei Q die Menge der Äquivalenzklassen von R. Zeigen Sie, dass die durch

$$\oplus : Q \times Q \to Q : \big(\,[(a,b)], [(c,d)]\,\big) \mapsto [(ad+bc, bd)]$$
$$\odot : Q \times Q \to Q : \big(\,[(a,b)], [(c,d)]\,\big) \mapsto [(ac, bd)]$$

definierten Abbildungen *wohldefiniert* sind (d.h. nicht von der Wahl der zur Definition benötigten Repräsentanten abhängen und ihr Bild tatsächlich in Q haben).

Aufgabe 15 (3+1 ÜP):

(i) Zeigen Sie, dass durch $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $s \sim_V t \;:\Longleftrightarrow\; s - t \in \mathbb{Q}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

(ii) Jede Äquivalenzklasse von V hat einen Repräsentanten im Interval $[0,1]$.

Aufgabe 16 - Besprechung in der Zentralübung (2+2 ÜP):

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *streng monoton wachsend* bzw. *streng monoton fallend*, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x > y \implies f(x) > f(y) \quad \text{bzw.} \quad x > y \implies f(x) < f(y).$$

(i) Beweisen oder widerlegen Sie: Jede streng monoton wachsende oder streng monoton fallende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie: Jede injektive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.