Übungen zur Analysis 1 **Blatt 5**
Lohkamp, Iniotakis, Halupczok **WS 11/12**

Abgabe: Freitag, 18. November 2011, bis 12.00 Uhr in die jeweiligen Kästen

---

Aufgabe 17 - Präsenzaufgabe (2+2 ÜP):
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$

(ii) $\frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}$, falls $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ sowie $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 18 (4 ÜP):
Bestimmen Sie, welche dieser Folgen in $\mathbb{R}$ konvergieren und welche divergieren. Was sind gegebenenfalls ihre Häufungspunkte, was ihr Grenzwert?

(i) $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (ii) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(iii) $\left(\frac{n^2}{3n^2+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (iv) $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 19 (2+2 ÜP):

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$d_{\max} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \big(x, y\big) \mapsto \max\{\,|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\,\},$$

wobei $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$, eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ liefert.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$d_{\text{SNCF}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \big(x, y\big) \mapsto \begin{cases} ||x-y||_{\text{eukl}}, & \text{falls } x = ay \text{ für ein positives } a \in \mathbb{R} \\ ||x||_{\text{eukl}} + ||y||_{\text{eukl}}, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ liefert.

Zeichnen Sie jeweils die Einheitskugel um $(\frac{1}{2}, 0)$ bezüglich dieser Metriken in ein Schaubild.

Aufgabe 20 - Besprechung in der Zentralübung (2+2 ÜP):

Es sei $CF := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\big|\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge in } \mathbb{Q}\,\}$.

(i) Zeigen Sie, dass eine Äquivalenzrelation auf CF definiert ist durch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \;:\Longleftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

(ii) Es sei $\mathcal{R}$ die Menge der so definierten Äquivalenzklassen. Zeigen Sie, dass die durch

$$\oplus : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R} : \big([(a_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]\big) \mapsto [(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$
$$\odot : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R} : \big([(a_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]\big) \mapsto [(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$

auf $\mathcal{R}$ definierte Addition und Multiplikation wohldefiniert (siehe Aufg. 14) sind.