Übungen zur Analysis 1 **Blatt 7**
Lohkamp, K. Halupczok **WS 11/12**

Abgabe: Freitag, 2. Dezember 2011, bis 12.00 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 25 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

Leiten Sie unter Verwendung der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion exp die folgenden Rechenregeln her:

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

(iii) Sei $e := \exp(1)$. Dann gilt für alle $r \in \mathbb{Q}$ die Gleichung $\exp(r) = e^r$.

(iv) Für alle $x > 0$ ist $\exp(x) > 1$ und für alle $x < 0$ ist $0 < \exp(x) < 1$.
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt $\exp(x) < \exp(y)$.

Aufgabe 26 (4 ÜP):

Für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sei $A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Zeigen Sie:
Sind $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, dann ist $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Aufgabe 27 (4 ÜP):

(i) Sei $x \in \mathbb{R}$ und seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Für $N, M \in \mathbb{N}$ werden die endlichen Summen $\sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ und $\sum_{\ell=0}^{M} b_\ell x^\ell$ multipliziert zu dem Produkt $\sum_{n=0}^{N+M} c_n x^n$. Stellen Sie eine Formel für die c_n in Abhängigkeit der a_k, b_ℓ auf.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeigen Sie: Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergieren, nicht aber ihr Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Aufgabe 28 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

Riemannscher Umordnungssatz: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiere, sei aber nicht absolut konvergent. Dann gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ eine Bijektion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} = c$.
Beweisen Sie diesen Satz in folgenden Schritten:

(i) Man betrachte die Folgen $p_n := \begin{cases} a_n, & \text{falls } a_n > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$ sowie $q_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } a_n > 0, \\ -a_n, & \text{sonst.} \end{cases}$

Die Reihen $\sum_n p_n$ und $\sum_n q_n$ divergieren. (Hier kann man indirekt argumentieren.)

(ii) Man wähle aus $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgenglieder aus und summiere sie auf, bis deren Summe gerade eben größer als c ist. Dann summiere man solange Folgenglieder aus $(-q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dazu, bis die Summe gerade eben kleiner als c ist, und verfahre so abwechselnd.

(iii) Die so erhaltene Reihe ist eine Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und konvergiert gegen c.