Übungen zur Analysis 1 **Blatt 8**
Lohkamp, K. Halupczok **WS 11/12**

Abgabe: Freitag, 9. Dezember 2011, bis 12.00 Uhr in die jeweiligen Kästen

---

Aufgabe 29 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

Leiten Sie die folgenden Eigenschaften der Logarithmusfunktion $\log_a$ zur Basis $a > 0$, $a \neq 1$, her:

(i) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, gilt $\log_a(x^y) = y \log_a x$.

(ii) Für alle $x, y > 0$ gilt $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$.

(iii) Für alle $x_1, \ldots, x_n > 0$ gilt $\frac{\log_a x_1 + \cdots + \log_a x_n}{n} \leq \log_a\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$.

(iv) Für alle $x, b > 0$, $b \neq 1$, gilt $\log_a(x) = \log_b(x) \cdot \log_a(b)$ und $a^x = b^{x \log_b(a)}$.

Aufgabe 30 (4 ÜP):

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $a \neq 1$. Welche $x \in \mathbb{R}_{>0}$ (in Abhängigkeit von a, b, c, d) erfüllen die folgende Gleichung?

(i) $\left(\exp(c \log_a x)\right)^b = 2^d$, (ii) $a^{\log_a(x^c)} = 2^b x^d$.

Aufgabe 31 (4 ÜP):

Zeigen Sie:

(i) Sei $a_n \to 0$. Dann folgt $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to 0$.

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a_n \to a$. Dann folgt $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to a$.

(iii) Sei $a_n \to 1$ und $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \to 1$.

(iv) Es gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Aufgabe 32 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

Widerlegen Sie die folgende Behauptung:
Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte reelle Folgen, dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Gilt diese Aussage wenigstens mit $\leq$ oder $\geq$ statt dem Gleichheitszeichen? Beweisen Sie die so abgeschwächte Behauptung.