Übungen zur Analysis 1 — **Blatt 9**
Lohkamp, K. Halupczok — **WS 11/12**

Abgabe: Freitag, 16. Dezember 2011, bis 12.00 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 33 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Funktionen stetig auf ihrem Definitionsbereich sind:

(i) $f + g : D \to \mathbb{R}, (f+g)(x) := f(x) + g(x)$, sowie $f \cdot g : D \to \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$,

(ii) $|f| : D \to \mathbb{R}$, $|f|(x) := |f(x)|$,

(iii) $h : D \to \mathbb{R}$, $h(x) := \min\{f(x), g(x)\}$,

(iv) $g \circ f : D \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, falls $g : D' \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq D'$.

Gelten diese Stetigkeitssätze so auch für $\mathbb{C}$? Ist die komplexe Konjugationsabbildung auch stetig? Begründen Sie auch, dass jede Polynomfunktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, die $a_k \in \mathbb{C}$, stetig ist.

Aufgabe 34 (4 ÜP):

Wo sind die folgenden Funktionen stetig? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

(i) $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Sie dürfen verwenden, dass $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist),

(ii) $w : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $w(x) := 0$ für $x < \sqrt{2}$ und $w(x) := 1$ für $x > \sqrt{2}$,

(iii) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) := x$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $r(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

(iv) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x\big(\frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor - (\frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor)^2\big)$ für $x \neq 0$ und $g(x) := 0$ für $x = 0$, wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ die Gaußklammer bezeichnet.

*Zusatzfrage: Welche Nullstellen hat die Funktion g?

Aufgabe 35 (4 ÜP):

Berechnen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^k - a^k}{x - a}$ für $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ (ii) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{12}{8 - x^3} \right)$

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$ (iv) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$

Aufgabe 36 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

Der Brouwersche Fixpunktsatz in Dimension 1:
Sei $I := [0, 1]$ und $f : I \to I$ stetig. Zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt hat.
Dabei heißt $x \in I$ ein *Fixpunkt* von f genau dann, wenn $f(x) = x$ gilt.
Die entsprechende Aussage für $I =]0, 1[$ oder $I = \mathbb{R}$ ist falsch, finden Sie jeweils ein Gegenbeispiel.