Übungen zur Analysis 1 **Blatt 10**
Lohkamp, K. Halupczok **WS 11/12**

Abgabe: Freitag, 13. Januar 2011, bis 12.00 Uhr in die jeweiligen Kästen

---

Aufgabe 37 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

Bestimmen Sie die Menge der Punkte, in denen die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, differenzierbar sind, und berechnen Sie dort ihre Ableitung.

(i) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$, (ii) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$,

(iii) $D = \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = (x^x)^x$, (iv) $D = \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = x^{(x^x)}$,

(v) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x^2+1)}{\exp(x^2-1)}$, (vi) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \log(|x|)$,

(vii) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$, (viii) $D = \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right)$,

wobei $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn}(x) := 1$ für $x > 0$, $\operatorname{sgn}(0) := 0$ und $\operatorname{sgn}(x) := -1$ für $x < 0$ ist.

Aufgabe 38 (4 ÜP):

Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeden Wert genau zweimal annimmt? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 39 (4 ÜP):

Man betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x + x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$.

Zeigen Sie: Die Funktion f ist differenzierbar und es gilt $f'(0) > 0$, aber f ist in keiner Umgebung von 0 monoton steigend.

Aufgabe 40 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

Sei $u < v$ und $f :]u, v[\to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.
Zeigen Sie: Für alle $a, b, c \in]u, v[$, $a < b < c$, gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b},$$

und f ist stetig.

Weihnachts-Aufgabe - (4 Bonus-ÜP):

Die Funktion f sei in $[0, a]$ stetig und streng monoton steigend, und es sei $f(0) = 0$, $f(a) = b$. Mit g sei die Umkehrfunktion zu f bezeichnet. Zeigen Sie: Dann gilt

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(y)dy = ab.$$

Hinweis: Eine Zerlegung des Intervalls $[0, a]$ überträgt sich mit f auf $[0, b]$. Dann betrachtet man die Untersumme über f und addiert die Obersumme über g. Anschaulich erhält man eine Zerlegung eines rechteckig ausgerollten Plätzchenteiges mit Flächeninhalt ab in lauter schmale rechteckige Plätzchen.