Übungen zur Analysis 1 **Blatt 11**
Lohkamp, K. Halupczok **WS 11/12**

Abgabe: Freitag, 20. Januar 2012, bis 12.00 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 41 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

(a) Berechnen Sie die folgenden Riemann-Integrale.

$$\text{(i)} \int_0^1 \sqrt{2x+3}\,dx, \quad \text{(ii)} \int_{-1}^1 xe^{-x^2}\,dx, \quad \text{(iii)} \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx, \quad \text{(iv)} \int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx.$$

(b) Berechnen Sie die Ableitung F' der Funktion $F : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} x\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

für $x > 0$, und es sei $F'(0) := 0$ gesetzt. Zeigen Sie, dass die Funktion F' auf keinem Intervall $[0, b]$, $b > 0$, Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 42 (4 ÜP):

Die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ konvergiert auf keinem Intervall, das den Nullpunkt enthält, gleichmäßig. Auf jedem endlichen abgeschlossenen Intervall, das den Nullpunkt nicht enthält, liegt jedoch gleichmäßige Konvergenz vor.

Aufgabe 43 (4 ÜP):

Berechnen Sie für $|x| < 1$ die Summe der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n.$$

Geben Sie auch jeweils die Ableitung und eine Stammfunktion an. Was sind die genauen Konvergenzbereiche? Untersuchen Sie dafür auch die Randpunkte der Konvergenzbereiche.

Aufgabe 44 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

(a) Zeigen Sie den *verallgemeinerten Mittelwertsatz:*

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Weiter sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$\alpha := \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Hinweis: Anwendung des Satzes von Rolle auf $h(x) = f(x) - \alpha(g(x) - g(a))$.

bitte wenden

(b) Zeigen Sie mithilfe von (a) die folgende *Regel von de l'Hospital*:

Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen, sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$ und es gelte $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \qquad \text{falls der rechte Limes existiert.}$$

Letzte Aufgabe - (4 Bonus-ÜP):

Es seien $f_0, \ldots, f_{10} : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}$ der Reihe nach definiert als

$$1,\ \log(\log x),\ \log x,\ e^{\sqrt{\log x}},\ x^a,\ x^b,\ e^x,\ x^x,\ (x^x)^x,\ e^{(e^x)},\ x^{(x^x)},$$

wobei $0 < a < b$. Zeigen Sie: Für $i, k \in \{0, \ldots, 10\}$ mit $i < k$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f_i(x)}{f_k(x)} = 0.$$

Hinweis: Die Regel von de l'Hospital gilt auch, falls $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) \in \{\infty, -\infty\}$, sowie, falls der Grenzübergang $x \to a+$ durch $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ ersetzt wird. Verwenden Sie diese Regel hier (ohne Beweis).