

Dies ist die Übungsklausur für die Analysis 1.

Anleitung:

Sie können damit im Selbsttest die Klausur für den Ernstfall proben. Nehmen Sie sich 3 Stunden Zeit und versuchen, in dieser Zeit die Aufgaben zu lösen. Drucken Sie dafür vorher diese Datei aus, ohne auf die folgenden Seiten zu schauen.

Falls Sie die Klausur einfach nur für sich lösen möchten, können Sie natürlich gleich auf die Aufgaben schauen, die Sie auf den folgenden Seiten dieser Datei finden.

Ihre Lösungen können Sie nach Absprache mit Ihrem Tutor oder Ihrer Tutorin zur Korrektur abgeben, spätestens aber bis zur Besprechung der Lösung in den Übungsgruppen am 10. und 11. Januar 2012 nach der Weihnachtspause. Für die richtigen Lösungen bekommen Sie Bonus-Übungspunkte gutgeschrieben, pro richtig gelöster Aufgabe gibt es einen Bonuspunkt (also maximal 10 Bonus-Ü).

*Ihnen allen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Start ins neue Jahr 2012!*

# Analysis 1

## Übungsklausur

Name, Vorname: .....

Matrikel-Nr: .....

Studiengang: .....

*Bepunktung der multiple choice-Fragen M1 bis M7: Jede richtig beantwortete wahr/falsch-Teilaufgabe gibt einen Punkt, jede falsch beantwortete gibt einen Punkt Abzug. Unbeantwortete wahr/falsch-Teilaufgaben geben weder Punkte noch Abzug. Insgesamt kann aber keine Aufgabe negative Punkte geben, auch wenn mehr Teilaufgaben falsch als richtig beantwortet wurden.*

Dauer der Klausur: 3 Stunden

- Lösen Sie, wenn möglich, die Aufgaben A1, A2 und A3 auf dem entsprechenden Blatt.
- Versehen Sie bitte auch alle zusätzlichen Blätter mit Ihrem Namen und Matrikel-Nr.
- Ihre Antworten im multiple choice-Teil markieren Sie bitte so mit einem Kreuz:

Multiple choice-Teil, zählt 70% :

Aufgabe	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	$\Sigma$
Punkte								

Aufgaben-Teil, zählt 30% :

Aufgabe	A1	A2	A3	$\Sigma$
Punkte				

Gesamt-Punktzahl:

Zensur:

MULTIPLE CHOICE-TEIL

**Aufgabe M1.** Wahr oder Falsch?

- (a) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Nullfolge. Dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  konvergent. wahr  falsch
- (b) Wenn es ein  $q \in \mathbb{R}$  gibt mit  $0 \leq q \leq 1$ , so dass für fast alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt:  $|a_{k+1}| \leq q|a_k|$ , so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut. wahr  falsch
- (c) Jede monoton fallende, beschränkte Folge ist konvergent. wahr  falsch
- (d) Es gibt eine konvergente Folge, die nur endlich viele Werte annimmt. wahr  falsch
- (e) Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt. wahr  falsch
- (f) Folgt aus der folgenden Bedingung die Konvergenz der Folge  $(a_j)$  gegen  $c$ ?  
Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es nur endlich viele  $j$  mit  $|a_j - c| > \varepsilon$ . wahr  falsch
- (g) Eine Folge mit einer konvergenten Majorante konvergiert und eine Folge mit einer divergenten Majorante divergiert. wahr  falsch
- (h) Jede monoton fallende Folge ist eine Nullfolge. wahr  falsch

**Aufgabe M2.** Kreuzen Sie zutreffende Aussagen an.

- (a) Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$  ist
- |                |                               |                                 |                      |                               |                                 |
|----------------|-------------------------------|---------------------------------|----------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| • konvergent   | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> | • absolut konvergent | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> |
| • alternierend | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> | • bestimmt divergent | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> |
- (b) Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist
- |              |                               |                                 |                      |                               |                                 |
|--------------|-------------------------------|---------------------------------|----------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| • konvergent | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> | • absolut konvergent | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> |
| • monoton    | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> | • eine Cauchyfolge   | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> |

**Aufgabe M3.** Auf welchen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  ist die Funktion stetig?

- (a) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^3$  ist stetig auf
- |                |                               |                                 |                                       |                               |                                 |
|----------------|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| • $\mathbb{R}$ | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> | • $\mathbb{R}_{>0}$                   | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> |
| • $\{0\}$      | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> | • $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> |
- (b) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$  ist stetig auf
- |                                     |                               |                                 |                                     |                               |                                 |
|-------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| • $\mathbb{R}$                      | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> | • $\mathbb{Z}$                      | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> |
| • $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> | • $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ | wahr <input type="checkbox"/> | falsch <input type="checkbox"/> |

MULTIPLE CHOICE-TEIL

**Aufgabe M4.** Wahr oder Falsch?

(a) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit der Eigenschaft  $f(x+1) = f(x)$ . Dann ist  $f$  beschränkt.  
*wahr*  *falsch*

(b) Sei  $A = [0, 1]$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nimmt  $f$  auf  $A$  ein Maximum an.  
*wahr*  *falsch*

(c) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  ist stetig.  
*wahr*  *falsch*

(d) Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton und surjektiv, so ist  $f$  auch bijektiv.  
*wahr*  *falsch*

(e) Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, falls für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(x - \frac{1}{n}\right).$$

*wahr*  *falsch*

(f) Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv, so existiert genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 0$ .  
*wahr*  *falsch*

(g) Sei  $A = [a, b] \cup [c, d]$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist  $f$  beschränkt.  
*wahr*  *falsch*

(h) Ist  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  stetig, so existiert ein  $x \in [0, 1]$  mit  $f(x) = x$ .  
*wahr*  *falsch*

**Aufgabe M5.** Kreuzen Sie zutreffende Aussagen an.

(a) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \lfloor x \rfloor$ , ist

- injektiv *wahr*  *falsch*       • surjektiv *wahr*  *falsch*
- bijektiv *wahr*  *falsch*       • monoton steigend *wahr*  *falsch*

(b) Die Funktion  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \sqrt{x}$ , ist

- stetig *wahr*  *falsch*       • stetig differenzierbar *wahr*  *falsch*
- konvex *wahr*  *falsch*       • monoton steigend *wahr*  *falsch*

MULTIPLE CHOICE-TEIL

**Aufgabe M6.** Kreuzen Sie zutreffende Aussagen an.

- (a) Die Menge aller stetigen Abbildungen  $f : \mathbb{R} \rightarrow W$ ,  $W \subseteq \mathbb{C}$  bildet mit  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  und  $(rf)(x) = rf(x)$  einen reellen Vektorraum, falls
- $W = [0, 1]$     wahr     falsch
  - $W = \mathbb{R}$       wahr     falsch
  - $W = \mathbb{C}$       wahr     falsch
  - $W = \mathbb{R}_{>0}$     wahr     falsch
- (b) Das Maximum der differenzierbaren Funktion  $f : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$
- ist ein lokales Maximum    wahr     falsch
  - ist ein globales Maximum    wahr     falsch
  - wird zweimal angenommen    wahr     falsch
  - ist gleich  $\frac{1}{2}$                 wahr     falsch

**Aufgabe M7.** Kreuzen Sie zutreffende Aussagen an.

- (a) Die vierte Ableitung von  $\cos x \cdot e^{-x}$
- ist  $-4 \cos x \cdot e^{-x}$     wahr     falsch
  - ist  $4x \cos x \cdot e^{-x}$     wahr     falsch
  - ist stetig                wahr     falsch
  - existiert nicht        wahr     falsch
- (b) Der Grenzwert von  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}$  für  $x \rightarrow 0$
- ist negativ    wahr     falsch
  - ist  $e^{-3/2}$     wahr     falsch
  - ist 1            wahr     falsch
  - existiert nicht    wahr     falsch

AUFGABEN-TEIL

**Aufgabe A1.**

Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Name: ..... Matrikel-Nr.: .....

AUFGABEN-TEIL

**Aufgabe A2.**

Zeigen Sie, dass für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  die Funktion  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x^n e^{-x}$  genau ein lokales und globales Maximum an der Stelle  $x = n$  besitzt. Gibt es ein Minimum?

Name: ..... Matrikel-Nr.: .....

AUFGABEN-TEIL

**Aufgabe A3.**

Beweisen Sie: Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und überall nicht-negativ. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in [a, b] : f(x) = 0.$$