Übungen zur Analysis 2 **Blatt 1**
Lohkamp, K. Halupczok **SoSe 2012**

Abgabe: Freitag, 20. April 2012, bis 12.00 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Taylorreihen im Punkt a. Wo konvergieren diese?

(a) $f(x) = \cos(3x)$ in $a = 0$ (b) $f(x) = x^2 e^{-x}$ in $a = 0$

(c) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ in $a = 0$ (d) $f(x) = \frac{5x-1}{x^2-x-2}$ in $a = 1$

(Hinweis für (d): $f(x) = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1}$)

Aufgabe 2 (4 ÜP):

(a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte durch Heranziehen der ersten Glieder bekannter Potenzreihenentwicklungen.

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2 - 6x})$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

(b) Benutzen Sie die Formel

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

und die Potenzreihenentwicklung von $\arctan x$, um π bis auf einen Fehler, der im Betrag $\leq 10^{-6}$ ist, zu berechnen. (Warum ist die direkte Approximation von $\pi = 4\arctan 1$ mit der Potenzreihe der arctan-Funktion numerisch ungeeignet?)

Aufgabe 3 (4 ÜP):

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall, $f \in C^{n+1}(D, \mathbb{R})$ und $a \in D$. Mit $T_n(x)$ sei das n-te Taylorpolynom von f in a bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$E_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n}, & x \in D \setminus \{a\}, \\ 0, & x = a, \end{cases}$$

differenzierbar in a ist, und bestimmen Sie $E_n'(a)$.

Aufgabe 4 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat in $a \in D$ eine Nullstelle der *Multiplizität* $n \in \mathbb{N}$, falls sie n-mal differenzierbar in a ist mit $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ und $f^{(n)}(a) \neq 0$.
Sei D ein offenes, beschränktes Intervall, $a \in D$ und $f \in C^n(D, \mathbb{R})$ habe in a eine Nullstelle der Multiplizität n. Zeigen Sie: In a liegt kein Extremum vor, wenn n ungerade ist. Ist n hingegen gerade, so ist a eine Maximalstelle falls $f^{(n)}(a) < 0$ gilt, und eine Minimalstelle falls $f^{(n)}(a) > 0$ gilt.