Übungen zur Analysis 2 **Blatt 2**
Lohkamp, K. Halupczok **SoSe 2012**

Abgabe: Freitag, 27. April 2012, bis 12.00 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 5 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

(a) Seien X und Y metrische Räume, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $A \subseteq Y$ in Y abgeschlossen. Zeigen Sie, dass dann auch $f^{-1}(A)$ in X abgeschlossen ist.

(b) Sei X ein metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Mengen abgeschlossen sind:

(i) Die „a-Stellenmenge“ $\{x \in X \mid f(x) = a\}$, (ii) $\{x \in X \mid f(x) \geq a\}$,
(iii) $\{x \in X \mid f(x) \leq a\}$, (iv) $\{x \in X \mid a \leq f(x) \leq b\}$.

(c) Belegen Sie mit einem Beispiel, dass das Urbild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung nicht notwendig kompakt sein muss.

Aufgabe 6 (4 ÜP):

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $D \subseteq X$. Dann ist auch D ein metrischer Raum mit der eingeschränkten Metrik $d_{|D \times D}$. Zeigen Sie:

(a) Für $U \subseteq D$ gilt: U offen in $D \Leftrightarrow \exists\ B \subseteq X$ offen in X: $U = D \cap B$.

(b) Für $A \subseteq D$ gilt: A abgeschlossen in $D \Leftrightarrow \exists\ C \subseteq X$ abgeschlossen in X: $A = D \cap C$.

(c) Geben Sie Beispiele für stetige Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ geeignet, so dass die in Aufgabe 5 (i)-(iv) angegebenen Mengen nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$ sind.

(d) Geben Sie Beispiele für unstetige Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X = \mathbb{R}$ so, dass die in Aufgabe 5 (i)-(iv) angegebenen Mengen nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$ sind.

Aufgabe 7 (4 ÜP):

Sei X ein metrischer Raum und seien K_1 und K_2 zwei disjunkte kompakte Teilmengen von X. Beweisen Sie: Es gibt offene Mengen U_1 und U_2 in X mit $K_1 \subseteq U_1$, $K_2 \subseteq U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Aufgabe 8 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

Sei X ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Sei $\overline{M}$ die Menge aller Grenzwerte konvergenter Folgen in M. Weiter sei $\overset{\circ}{M} := X \setminus (\overline{X \setminus M})$ und $\partial M := \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$. Zeigen Sie:

(a) $\overline{M}$ ist eine abgeschlossene Menge.

(b) $\overline{M}$ ist der Schnitt aller abgeschlossenen Mengen, die M enthalten.

(c) M ist genau dann abgeschlossen, wenn $\overline{M} = M$ ist.

(d) Die Menge $\overset{\circ}{M}$ ist offen.

(e) Die Menge ∂M ist abgeschlossen.

Bemerkung: $\overline{M}$ heißt die *abgeschlossene Hülle* bzw. der *Abschluss* von M, die Menge ∂M der *Rand* von M und $\overset{\circ}{M}$ das *Innere* von M.