**Übungen zur Analysis 2** **Blatt 3**
**Lohkamp, K. Halupczok** **SoSe 2012**

Abgabe: Freitag, 4. Mai 2012, bis 12:00 Uhr in die jeweiligen Kästen

## Aufgabe 9 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

(a) Berechnen Sie für die folgenden beiden Kurven $f : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$, die Ableitung $f'(a)$ für $a \in I$. Geben Sie auch die Tangentengleichung im Punkt $f(a)$ an.

   (i) Die Kurve $f : I \to \mathbb{R}^4$, $f(t) := (1, \sin(t), t^2, t^3 - t)$ mit $I := [0, 2]$ für $a = 1$.

   (ii) Die Kurve $f$ im $\mathbb{R}^3$, die sich als Schnitt der Flächen $x+y+z = 3$ und $x^2-y^2+2z^2 = 2$ ergibt, im Punkt $f(a) = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Für eine differenzierbare Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ sei $L(x) := \|f(x)\|$ für $x \in I$ der (euklidische) Abstand von $f(x)$ zum Nullpunkt.
Zeigen Sie: $\forall x \in I, f(x) \neq 0 : \langle f(x), f'(x)\rangle = L(x)L'(x)$.
Schließen Sie: Der Ableitungsvektor einer differenzierbaren Kurve mit konstanten Abstand zum Nullpunkt steht in jedem Punkt senkrecht zum Kurvenvektor.

## Aufgabe 10 (4 ÜP):

(a) Berechnen Sie die Länge der Sinuskurve $\sin : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ auf zwei Nachkommastellen genau.

(b) Berechnen Sie die Länge des Einheitskreises im $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ und der Einsnorm $\|\cdot\|_1$. Bem.: $\|(x, y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$ und $\|(x, y)\|_1 := |x| + |y|$.

## Aufgabe 11 (4 ÜP):

Zeigen Sie: Die mit der differenzierbaren Funktion

$$g(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

definierte Kurve $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist nicht rektifizierbar.

## Aufgabe 12 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

Es sei $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Konstruieren Sie Zerlegungen $\Delta = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{2^n} \Delta_j^n$ von $\Delta$ in gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke $\Delta_j^n$ vom Flächeninhalt $\frac{1}{2^{n+1}}$, so dass folgendes gilt:

(i) $\Delta_j^n = \Delta_{2j}^{n+1} \cup \Delta_{2j-1}^{n+1}$ für alle $1 \leq j \leq 2^n$,

(ii) $\Delta_j^n$ und $\Delta_{j+1}^n$ haben eine gemeinsame Seite für alle $1 \leq j \leq 2^n$.

Sei $I_j^n := [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$. Die Kurve $f : I := [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f(t) := (x, y)$, falls $\{t\} = \bigcap_{n=1}^\infty I_{k_n}^n$ und $\{(x, y)\} = \bigcap_{n=1}^\infty \Delta_{k_n}^n$ mit der gleichen Folge natürlicher Zahlen $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass $f$ wohldefiniert ist und dass $f(I) = \Delta$ gilt. Approximieren Sie $f$ auch zeichnerisch durch rektifizierbare Kurven.