Abgabe: Freitag, 11. Mai 2012, bis 12:00 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 13 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

(a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ und $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, falls existent. Ist f stetig?

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung und den Gradienten der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2y - 3xy^2 + z$. Was ist die Richtungsableitung der Funktion f in $(0,0,0)$ in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$? In welchen Richtungen ist die Richtungsableitung von f in $(0,0,0)$ betraglich am größten?

(c) Bestimmen Sie die Tangentialebene der Fläche $z = f(x,y)$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ für (i) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $(x_0,y_0) = (1,2)$ und (ii) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 3xy$, $(x_0,y_0) = (2,-1)$.

Aufgabe 14 (4 ÜP):

Zeigen Sie: Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ist im Punkt $(0,0)$ unstetig, dort aber in allen Richtungen differenzierbar.

Aufgabe 15 (4 ÜP):

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y = 0, \\ \dfrac{(x^2y + xy^2)\sin(x-y)}{x^2+y^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ existieren und dass aber $(D_2D_1f)(0,0) \neq (D_1D_2f)(0,0)$ gilt.

Aufgabe 16 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:
Für $u, v \in \mathbb{R}$ ist $g(t) = f(a+ut, b+vt)$ differenzierbar in $t = 0$ und es gilt

$$g'(0) = uD_1f(a,b) + vD_2f(a,b).$$