Übungen zur Analysis 2 **Blatt 5**
Lohkamp, K. Halupczok **SoSe 2012**

Abgabe: Freitag, 18. Mai 2012, bis 12:00 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 17 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

(a) Was sind die Ableitungen der folgenden Funktionen?

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x, x^2, x^4)^T$ $\quad u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $u(x, y, z) = (x + y, zy^2 - xy, z^2 - x, zyx^2)^T$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = 4x^2yz^3$ $\quad v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v(x, y) = (x^2y - y, x^3 - 3x^2y^2)^T$

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $h(x, y) = (x, y, xy^2)^T$ $\quad w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $w(x, y, z) = ((x + y + z)e^x, (x^2 + y^2)e^{-x})^T$

(b) Berechnen Sie für $f(x, y) = e^{xy^2}$, $x(t) = t \cos t$ und $y(t) = t \sin t$ die Ableitung in $t_0 = \pi/2$.

(c) Berechnen Sie für $f(x, y) = x^3 - xy + y^3$, wenn $x(r, \varphi) = r \cos \varphi$ und $y(r, \varphi) = r \sin \varphi$, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial r}$ und $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$.

Aufgabe 18 (4 ÜP):

Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y = 0, \\ (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{sonst}, \end{cases}$$

ist in $(0, 0)$ differenzierbar und die beiden partiellen Ableitungen von f sind in $(0, 0)$ unstetig.

Aufgabe 19 (4 ÜP):

Es sei $f : S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \|x\|_2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: F ist genau dann im Ursprung differenzierbar, wenn f linear ist, d. h. wenn eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in S^{n-1}$ existiert.

Aufgabe 20 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

Sei $I := [0, 1[$ und für $a, b \in \mathbb{C}$ sei $s(a, b) := \{a + t(b - a) \mid t \in I\} \subseteq \mathbb{C}$ die Strecke von a nach b, sowie

$$\begin{aligned} T(s(a, b)) := {} & s\Big(a, a + \frac{1}{3}(b - a)\Big) \;\cup\; s\Big(a + \frac{1}{3}(b - a), a + \frac{1}{3}(b - a) + \frac{1}{3}(b - a)e^{i\pi/3}\Big) \\ & \cup\, s\Big(a + \frac{1}{3}(b - a) + \frac{1}{3}(b - a)e^{i\pi/3}, a + \frac{2}{3}(b - a)\Big) \;\cup\; s\Big(a + \frac{2}{3}(b - a), b\Big). \end{aligned}$$

Für eine endliche disjunkte Vereinigung $A = \bigcup_{k=1}^m s_k$ von Strecken sei $T(A) := \bigcup_{k=1}^m T(s_k)$, und $T^n(I)$ sei induktiv definiert durch $T^0(I) := I$ und $T^n(I) := T(T^{n-1}(I))$. Zeigen Sie: Jedes $T^n(I)$ ist die Bildmenge einer Kurve $f_n : I \to T^n(I) \subseteq \mathbb{C}$, die sich nicht selbst schneidet, und die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine nicht rektifizierbare Kurve $f : I \to \mathbb{C}$.