Abgabe: Freitag, 25. Mai 2012, bis 12:00 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 21 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

(a) Sei $w \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \langle w, x\rangle$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$.

(b) Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $r := \|x\|_2$. Berechnen Sie $\operatorname{div}(r \operatorname{grad} \frac{1}{r^3})$, falls $r \neq 0$.

(c) Für $b \in \mathbb{R}^3$ fest sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) := \frac{1}{2} b \times x$. Berechnen Sie $\operatorname{rot} v(x)$.

(d) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \exp(x \sin y)$, im Punkt $a = (0, 0)$.

Aufgabe 22 (4 ÜP):

Die Menge $\mathbb{R}^{n\times n}$ der reellen quadratischen Matrizen sei mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert. Zeigen Sie:

(a) Die Teilmenge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ der invertierbaren Matrizen ist offen.

(b) Die Abbildung $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto AB$, ist differenzierbar.

Aufgabe 23 (4 ÜP):

Sei $v = (v_1, v_2) : U \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld auf der offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^2$. Eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f = v$ heißt ein *Potential* des Vektorfeldes v.
Zeigen Sie: Ist $\gamma : [0, 1] \to U$ ein *glatter Weg*, d. h. eine stetig differenzierbare Abbildung, so gilt für ein Potential f von v:

$$\int_0^1 \Big(v_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)\Big) dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

Aufgabe 24 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

(a) Es sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die *konvex* ist, d. h. so, dass die Streckenverbindung je zweier Punkte von U komplett in U liegt. Zeigen Sie als Konsequenz des Mittelwertsatzes: Ist $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in U$, dann ist f konstant auf U.

(b) Die Behauptung in Teil (a) gilt auch für allgemeinere Teilmengen U des $\mathbb{R}^n$, welche?

(c) Es sei $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Zeigen Sie, dass $f(X) = \{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}$ gilt: Die Funktion f nimmt nur die beiden Werte $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ an.