Abgabe: Freitag, 8. Juni 2012, bis 12:00 Uhr in die jeweiligen Kästen

☼ Hinweis: am 06.06. findet ab 14 Uhr das Sommerfest der Fachbereiche Mathematik und Informatik statt! ☼

Aufgabe 25 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

(a) Untersuchen Sie die folgende Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf lokale und globale Extrema: $f(x,y) = xy + 64x^{-1} + 64y^{-1}$, $\qquad g(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

(b) Entwickeln Sie $x^2 + 3y - 2$ in Potenzen von $x - 1$ und $y + 2$.

(c) Zeigen Sie: $T(x) := \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ ist eine Kontraktion auf $A := [1,3] \subseteq \mathbb{R}$.
Berechnen Sie den Fixpunkt.

Aufgabe 26 (4 ÜP):

Zeigen Sie, dass es für alle $x, y > 0$ ein $\theta \in [0,1]$ gibt mit

$$\log \frac{x+y}{2} = \frac{x+y-2}{2+\theta(x+y-2)}.$$

Aufgabe 27 (4 ÜP):

Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : U \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n+1}}}{1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n},$$

und beweisen Sie damit die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel,

$$\sqrt[n+1]{y_1 \cdots y_{n+1}} \leq \frac{y_1 + \cdots + y_{n+1}}{n+1}$$

für alle $y_1, \ldots, y_{n+1} > 0$.

Aufgabe 28 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

(a) Gegeben sei $M := \mathbb{R}^2$ mit der Metrik $d(u,v) := \|u - v\|_\infty := \max\{|u_1 - v_1|, |u_2 - v_2|\}$. Zeigen Sie, dass

$$f(u) := \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Berechnen Sie die ersten zwei Schritte der Fixpunktiteration für $v_0 = (1, -2)^T$ und berechnen Sie den Fixpunkt auch direkt.

(b) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $\varphi : X \to X$ eine schwach kontrahierende Funktion, d. h. für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt $d(\varphi(x), \varphi(y)) < d(x,y)$. Zeigen Sie, dass dann ein eindeutiger Fixpunkt von φ in X existiert.