Übungen zur Analysis 2 **Blatt 8**
Lohkamp, K. Halupczok **SoSe 2012**

Abgabe: Freitag, 15. Juni 2012, bis 12:00 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 29 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

(a) Sei $U_1 = \mathbb{R}^k$, $U_2 = \mathbb{R}^m$, $f : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ linear, d. h. $f(x, y) = Ax + By$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Sei B invertierbar. Zeigen Sie: Dann gibt es eine lineare Abbildung $g : U_1 \to U_2$ mit $(f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x))$ für alle $x \in U_1$. Geben Sie $g(x)$ und $Dg(x)$ explizit an.

(b) Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^3 + xy^2 - 3$ als Schar von Polynomen in y mit Parameter x. Zeigen Sie: Es gibt $\varepsilon, \delta > 0$ so, dass für alle $x \in]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[$ das Polynom $f(x, y)$ (in y) genau eine Nullstelle $y \in]1 - \delta, 1 + \delta[$ hat.

(c) Welche lokalen Umkehrfunktionen hat die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus S \to \mathbb{R}$, $f(x) := \tan x$, wobei $S := \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$?

(d) Welche lokalen Umkehrfunktionen hat $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(r, \varphi) := (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$?

Aufgabe 30 (4 ÜP):

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$, ist lokal umkehrbar, aber nicht injektiv.

(b) Folgern Sie aus dem impliziten Funktionensatz: Es gibt keine stetig differenzierbare bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 31 (4 ÜP):

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, y) := x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 1$, $a = (0, 0)$, $b = 1$, also $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Geben Sie eine Abbildung $g : V_1 \to V_2$ explizit an, mit der die Behauptung des impliziten Funktionensatzes stimmt. Beschreiben Sie g anschaulich.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $0 \in U$ und $u, v : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $u(0) = v(0) = 0$ so, dass für $u = u(x)$ und $v = v(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} u + 2u^2 + v^2 + x^2 + 2v - x &= 0 \\ xuv + e^u \sin(v + x) &= 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $u'(0)$ und $v'(0)$.

Aufgabe 32 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal umkehrbar, d. h. f stetig differenzierbar und $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in U$. Die für ein $U_0 \subseteq U$, U_0 offen in $\mathbb{R}^n$, gebildete Umkehrfunktion $g : f(U_0) \to U_0$ heißt ein *Zweig von* f^{-1} *auf* $f(U_0)$ (und ist abhängig von U_0).

Gegeben sei $F(x, y) := (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$. Finden Sie vier Zweige G_1, G_2, G_3, G_4 von F^{-1} auf

$$V := \{(u, v) \mid u + v > 0, u - v > 0\},$$

und geben Sie für $1 \leq i \leq 4$ eine affine Transformation an, die G_i nahe $(1, 0) \in V$ approximiert.