Übungen zur Analysis 2 **Blatt 9**
Lohkamp, K. Halupczok **SoSe 2012**

Abgabe: Freitag, 22. Juni 2012, bis 12:00 Uhr in die jeweiligen Kästen

---

Aufgabe 33 - Präsenzaufgabe (4 ÜP):

(a) Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, auf dem abgeschlossenen Quadrat $Q := [0,1]^2$.

(b) Welchen Abstand hat die Hyperbel $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ zum Ursprung?

(c) Gegeben sei die *Lemniskate*, eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ mit der Gleichung $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, $a \neq 0$. Warum stellt das Bild dieser Kurve keine Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^2$ dar?

Aufgabe 34 (4 ÜP):

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\, dx$.

Anleitung: Betrachten Sie $f(\alpha) := \displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x}\, dx$ für $\alpha > 0$ und die Ableitung von f.

Beachten Sie, dass der Satz von der differenzierbaren Abhängigkeit vom Parameter angewendet werden kann.

Aufgabe 35 (4 ÜP):

Es seien $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen: $f(x,y,z) := x + y + z$, $g(x,y,z) := 2x + 3y + 2z$, $h(x,y,z) := x - y + 2z$. Bestimmen Sie die Extrema

(a) von f auf der Oberfläche der Einheitskugel (bzgl. der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$) im $\mathbb{R}^3$,

(b) von g auf dem Durchschnitt des Zylinders $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2\}$ und der Ebene $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 1\}$,

(c) von h auf dem Ellipsoid $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$.

Letzte Aufgabe 36 - Besprechung in der Zentralübung (4 ÜP):

Zeigen Sie:

(a) Ist f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent: (i) f besitzt ein Potential φ (vgl. Aufgabe 23), (ii) $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$.

Ansatz: $\varphi(x,y) = \int_0^x f_1(\xi, 0)\, d\xi + \int_0^y f_2(x,\eta)\, d\eta$ oder wie in Bsp. (10.2).

(b) Das Vektorfeld $f(x,y) := \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ auf $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erfüllt die Bedingung (ii) in (a), besitzt aber kein Potential auf ganz U.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 23 mit geeigneten Wegen γ.