Satz 2 (Kompakte Quader):

Seien $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}$, $a_\nu \le b_\nu$ für $\nu = 1, \dots, n$.
Dann ist abgeschlossene Quader
$$Q := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_\nu \le x_\nu \le b_\nu \text{ für alle } \nu\}$$
kompakt in $\mathbb{R}^n$.

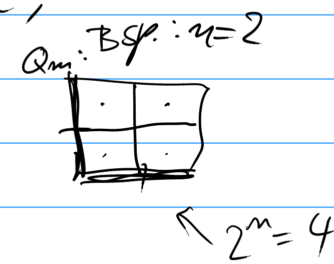
Bew.: Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von Q.

Ann.: Q ist nicht durch endl. viele der U_i überdeckbar.

- Plan: Konstruieren dann (per vollst. Ind.) eine Folge von abgeschl. Teilquadern
$$Q_0 = Q \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \dots \quad \text{mit:}$$
  i) jedes Q_m kann nicht durch endl. vielen der U_i überdeckt werden
  ii) $\operatorname{diam}(Q_m) = 2^{-m} \operatorname{diam} Q \xrightarrow{m \to \infty} 0$

- Durchführung des Plans:

Sei $Q_0 := Q$. Ist Q_m schon konstruiert,
etwa $Q_m = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$,
die $I_\nu \subseteq \mathbb{R}$ abg. Intervalle,
so zerlege jedes I_ν in $I_\nu = I_\nu^{(1)} \cup I_\nu^{(2)}$,
beide $I_\nu^{(i)}$ mit halber Länge,
und setze $s_\nu \in \{1,2\}$
dann $Q_m^{(s_1, s_2, \dots, s_n)} := I_1^{(s_1)} \times \dots \times I_n^{(s_n)}$.



Wir erhalten 2^n Quader mit $\bigcup_{s_1, \dots, s_n \in \{1,2\}} Q_m^{(s_1, \dots, s_n)} = Q_m$.

Da Q_m nicht von endl. vielen der U_i überdeckbar ist, gilt dies auch für eines der $Q_m^{(s_1, .., s_n)}$, dieser Quader sei Q_{m+1}, und $\operatorname{diam}(Q_{m+1}) = \frac{1}{2} \operatorname{diam}(Q_m) = 2^{-m-1} \operatorname{diam} Q$.
Q_{m+1} hat also wieder die Eigensch. i) + ii).

- Nach dem Schachtelungsprinzip Satz 0.7 ex. ein $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\forall m \in \mathbb{N}_0 : a \in Q_m$.

Sei $i_0 \in I$ mit $a \in U_{i_0}$ gewählt (die U_i überdecken $Q = Q_0 \ni a$).
Da U_{i_0} offen, ex. ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq U_{i_0}$.
Ist m so groß, dass $\operatorname{diam}(Q_m) < \varepsilon$, folgt:

$$Q_m \subseteq B_\varepsilon(a) \subseteq U_{i_0}.$$

offene Überdeckung mit nur 1 Menge U_{i_0}, ↯ der Eigenschaft i), die Q_m hat.

Also ist Q kompakt. $\square$

Satz 3: Jede kp. Teilmenge A eines metr. Raumes X ist beschränkt.

Bew.: Sei $a \in A$. Jeder Punkt $x \in X$ hat einen endl. Abstand von a, also gilt

$$A \subseteq X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a),$$

$(d(x,a) \in \mathbb{R},\ d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0})$

d.h. $(B_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ ist offene Überdeckung von A.
Da A kompakt, genügen endl. viele der Bälle zur Überdeckung von A, d.h.

$$\exists\, n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N} : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_{n_j}(a).$$

Mit $n := \max\{n_1,\dots,n_k\}$ folgt $A \subseteq B_n(a)$.
Also ist A beschränkt. □

<u>Korollar:</u> (aus Satz 3+1) Jede konvergente Folge (als Menge $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$) in einem metrischen Raum ist beschränkt.

<u>Satz 4:</u> X metr. Raum, $K\subseteq X$ kompakt.
Dann ist K abgeschl.
und jede abg. Teilmenge $A\subseteq K$ ist kompakt.

<u>Beweis:</u> a) Beh.: K ist abgeschlossen, d.h. $X\setminus K$ offen.

Sei $b\in X\setminus K$. Wegen Satz 0.1 (X ist hausdorffsch) gilt:

$$\forall x\in K\ \exists \text{ offene Umg. } U_x \text{ von } x$$
$$\exists \text{ offene Umg. } V_x \text{ von } b : \quad U_x\cap V_x = \emptyset.$$

Da $\bigcup_{x\in K} U_x \supseteq K$ und K kp.,

ex. $x_1,\dots,x_s\in K : K\subseteq U_{x_1}\cup\dots\cup U_{x_s}$.

Dann: $V := V_{x_1}\cap V_{x_2}\cap\dots\cap V_{x_s}$ offene Umg. von b mit $V\cap \bigcup_{i=1}^{s} U_{x_i} = \emptyset$, also $V\subseteq X\setminus K$.

b) Sei $A \subseteq X$ abg. mit $A \subseteq K$.
Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von A.
Es ist $U := X \setminus A$ offen
und $\bigcup_{i \in I} U_i \cup \underbrace{U}_{= X \setminus A \text{ offen}} = X \supseteq K$.

Da K Kp., ex. $i_1, \ldots, i_m \in I$ mit $U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_m} \cup \underbrace{U}_{X \setminus A} \supseteq K \supseteq A$,
also

$$U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_m} \supseteq A. \qquad \square$$

Satz 5 (Satz von Heine-Borel):

Eine Teilmenge $A \subseteq \boxed{\mathbb{R}^n}$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

[$\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$: A Kp. $\Leftrightarrow$ A abg. & A beschr.]

Bew.: „$\Rightarrow$": Satz 3+4.

„$\Leftarrow$": A abg. & beschr. $\Rightarrow$ A in genügend großem Quader enthalten, Quader ist Kp. nach Satz 2. Nach Satz 4 folgt, dass A Kp. ist. $\square$

Bsp.: $A \subseteq \mathbb{R}$ Kp. Da A beschr., sind $\sup A$, $\inf A$ endl. (in $\mathbb{R}$, Vollst.axiom). Daher ex. Folgen $(x_n) \subseteq A$, $(y_n) \subseteq A$:
$$\lim x_n = \sup A, \quad \lim y_n = \inf A.$$
Da A abg., folgt $\sup A \in A$, $\inf A \in A$, wegen Satz 0.5.

Also: Eine Kp. Menge A in $\mathbb{R}$ hat stets ein Minimum und Maximum in A.

Bem.: Der Satz von Heine-Borel
gilt für $(\mathbb{R}^n, d_{eukl.})$,
aber nicht notw. für beliebige metr. Räume.
Bsp.: $X := \mathbb{R}^n$ mit $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$
$\delta(x,y) := \min(1, \|x-y\|) \in [0,1]$
als Metrik
$\leadsto$ offenen Mengen sind dieselben wie in $(\mathbb{R}^n, d_{eukl})$
$\leadsto$ Kompakten Mengen sind dieselben wie in $(\mathbb{R}^n, d_{eukl})$.

$\mathrm{diam}_\delta(X) = \mathrm{diam}_\delta(\mathbb{R}^n) = 1 \leadsto \mathbb{R}^n$ ist beschr. (bezgl. δ),
$\mathbb{R}^n$ ist abg., $\mathbb{R}^n$ nicht kompakt

Satz 6: Seien X, Y metr. Räume, $f : X \to Y$ stetige Abb.
Ist $K \subseteq X$ kompakt, so ist auch
$f(K) \subseteq Y$ kompakt.

(Bem. ist Verallg. des ZWS in der Form
„$f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $[a,b] \subseteq D \Rightarrow f([a,b]) = [c,d]$
für $c,d \in \mathbb{R}$")

Bew.: Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überd. von $f(K)$.

Dann sind die $V_i := f^{-1}(U_i)$ offen in X,
und
$K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$. Da K kompakt, ex. $i_1, \dots, i_k \in I$
mit $K \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}$.
Daraus folgt: $f(K) \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$. Also ist $f(K)$ kompakt. $\square$

Satz 7: X kp., metr. Raum, $f: X \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann: $f(X)$ beschr.,
f nimmt Min. und Max. als Werte an,
d.h. $\exists\, p, q \in X: f(p) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$,
$f(q) = \inf\{f(x) \mid x \in X\}$.

Bew.: $A := f(X) \subseteq \mathbb{R}$ ist kp. nach Satz 6.
Jetzt die Beh. in Bem. zu Satz 5. $\square$

Bem.:
Abstandsfunktion:

Sei (X, d) metr. Raum, $A \subseteq X$, $x \in X$.
Der Abstand von x zur Menge A
wird def. als $\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$.

Diese Abstandsfunktion: $\operatorname{dist}(\cdot, A): X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
ist stetig

Bew.: Da $\operatorname{dist}(x', A) \leq d(x, x') + \operatorname{dist}(x, A)$
gilt
$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(x', A)| < \varepsilon$ für $d(x, x') < \varepsilon$.

Für $K \subseteq X$ def. $\operatorname{dist}(K, A) := \inf\{\operatorname{dist}(x, A) \mid x \in K\}$
$= \inf\{d(x,y) \mid x \in K, y \in A\}$.

Beh.: ist A abg., K kp., $A \cap K = \emptyset$, so ist
$\operatorname{dist}(A, K) > 0$.

⌜ Da K Kp. und $\mathrm{dist}(\cdot, A)$ stetig, ex. nach Satz 7 ein $q \in K$ mit $\underline{\mathrm{dist}(q,A) = \mathrm{dist}(K,A)}$.
Da A abg., ex. $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(q) \subseteq X \setminus A$.
$(q \in X \setminus A$, da $q \in K$ und $A \cap K = \emptyset)$.
Also:
$$\mathrm{dist}(K,A) = \mathrm{dist}(q,A) \geq \varepsilon > 0. \quad ⌟$$

<u>Bem.:</u> X metr. Raum, $A_1, A_2 \subseteq X$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
$$\not\Rightarrow \mathrm{dist}(A_1, A_2) > 0.$$

<u>Bsp.:</u> $X = \mathbb{R}^2$, $A_1 := \{(x,y) \in X \mid x \cdot y = 0\}$ Achsenkreuz
$A_2 := \{(x,y) \in X \mid x \cdot y = 1\}$ Hyperbel.

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset, \text{ aber } \mathrm{dist}(A_1, A_2) = 0.$$