

Inhalt der Vorlesung "Logische Grundlagen"

im WiSe 2016/17, PD Dr. K. Halmiczok

LG1: Mathematische Grundbegriffe und Aussagenlogik

Stichworte: Sprache der Mathematik, Abstrakte Formalismus, Deduktion durch Einsetzen, Induktion, Axiomensysteme, Satz, Aussage, Verknüpfungen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, Klammersetzungsregeln, Implikation, Äquivalenz, Logikregeln, erste Beweistheorie

LG2: Prädikatenlogik, Quantoren, einfache Mengenlehre

Stichworte: Prädikate, Quantoren $\forall, \exists$, Umgang mit Quantoren, Fundamente der Mathematik, Mengenlehre, Aussondern und Aufzählen, Verknüpfungen $\cap, \cup, \setminus$, Teilmengen $\subseteq, \neq$, Potenzmengen, Russel-Antinomie

LG3: Beweistechniken und die Praxis des Beweisens

Stichworte: Formulierung eines Satzes, mehrere Voraussetzungsteile, Formulieren eines Beweises, direkte/indirekte Beweise, Kontrapositionsbeweise, Widerspruchsbeweise, Beweise von Sätzen mit Quantoren, Schlussprinzip, Fallunterscheidungen, effiziente Beweise (z.B. Ringschluss, Mengenvgl.), Heuristik

LG4: Natürliche Zahlen und die vollständige Induktion

Stichworte: Peano-Axiome, Konstruktion der natürlichen Zahlen, Peano-Arithmetik, Rekursion/Iteration, Zeichen Π und Σ , Grenzen der Peano-Arithmetik: Goodstein-Folgen, Prinzip der vollständigen Induktion, Beweise mit vollständiger Induktion

LG5: Kartesische Produkte, Relationen, Ordnungen, Schranken/Supremum

Stichworte: Hausdorff/Kuratowski und Kartesische Produkte, Relationen und verwandte Eigenschaften von Relationen, Ordnungen und totale Ordnungen, größtes/maximales Element, obere Schranke, Supremum, Zusammenhänge dieser Begriffe
[kleinstes/minimales Element, untere Schranke, Infimum]

LG6: Äquivalenzrelationen

Stichworte: $\sim$ -Relation, $\sim$ -klassen, Quotientenmengen, solche mit algebraischen Strukturen $+$ $\cdot$, Konstruktion der Zahlbereiche mit $\sim$ -Relationen

LG7: Abbildungen / Funktionen

Stichworte: Def. Abbildung als Relation, Bild einer Teilmenge, Urbild einer Teilmenge, Abbildungstypen: surjektiv/injektiv/bijektiv, Komposition und (Rechts-/Links-)inverse Abb., $\text{sym}(X)$, besondere Abb.: charakteristische Abb., Folgen, Abbildungen bei Quotientenmengen

LG8: Endliche Mengen

Stichworte: endliche Menge, Kardinalität $\#X = n$, Ergebnisse über endliche Mengen Kombinatorik, Permutationen, $\binom{n}{k}$, Binomialsatz, Multinomialatz, Potenzreihen als kombinatorisches Hilfsmittel

LG9: Große Zahlen und unendliche Mengen

Stichworte: große Zahlen, abzählbar unendlich, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig, Lemma von Cantor, überabzählbar, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mathbb{R}$ sind überabzählbar, Cantorsche Diagonalverfahren, Hilberts Hotel, Wachstum divergenter Folgen

LG10: Das Auswahlaxiom

Stichworte: Familien, beliebige (Durch-) Schnitte/Vereinigungen/Produkte, Auswahlaxiom, deren äquivalente Formulierungen (surj. $\Rightarrow$ Rechtsinverse, bel. Produkte nicht leerer Mengen sind $\neq \emptyset$, Lemma von Zorn, jeder VR hat eine Basis), Fixpunktsatz von Bourbaki impliziert mit dem Auswahlaxiom das Lemma von Zorn

LG11: Die ZFC-Axiome

Stichworte: alle 10 ZFC-Axiome mit Besprechung, Erweiterungen von ZFC, Widerspruchsfreiheit von ZFC, Gödelsche Unvollständigkeitssätze, Kontinuumshypothese