Vorlesung "Logische Grundlagen"

LG 1: Mathematische Grundbegriffe und Aussagenlogik

Stichworte: Sprache der Mathematik, Abstrakter Formalismus, Deduktion durch Einsetzen, Induktion, Axiomensysteme, Satz, Aussage, Verknüpfungen $\wedge \vee \neg$, Klammersetzungsregeln, Implikation, Äquivalenz, Logikregeln, erste Beweistheorie

---

§1: Einstimmung: Zur Sprache der Mathematik

Das Wort Definition ist aus dem Lateinischen und bedeutet "Abgrenzung". In Definitionen versuchen wir, die Bedeutung von Symbolen und Begriffen so klar wie nur möglich festzulegen. In der Mathematik werden häufig Begriffe der Umgangssprache (wie z.B. Gruppe, Ring, Körper, Abbildung, ...) umgewidmet und ihnen spezielle neue Bedeutungen gegeben, so dass eine Fachsprache entsteht. Neben dem Anspruch, die Begriffe der Fachsprache sauber zu definieren, möchte man auch Aussagen über diese soweit wie möglich beweisen, d.h. mithilfe logischen Schlussfolgerns zu verifizieren. Das bedeutet, mit der Anwendung klarer logischer Regeln zu zeigen, dass diese wahr sind. Dabei greift man auf möglichst wenige Begriffe, Aussagen und Regeln zurück (sogenannte Axiome als Grundbausteine der Mathematik) und baut auf diesen auf. Die Axiome als solche werden dann nicht mehr hinterfragt, sondern als gegeben und wahr akzeptiert, wenn sie als klar und einleuchtend erscheinen. Diese Herangehensweise wurde im Laufe der Mathematikgeschichte immer wieder heftig diskutiert und bis heute hinterfragt, wie z.B. das sogenannte Auswahlaxiom.

Dennoch spricht in der täglichen Praxis der Mathematik nichts gegen diese Vorgehensweise: üblicherweise baut man auf dem sogenannten ZFC-Axiomensystem auf (dessen Axiome wir in dieser Vorlesung mal sehen werden) und wendet die gewöhnlichen Schlüsse der Aussagenlogik an. Wie letzteres geht, wollen wir hier als erstes erarbeiten.

LG 1

-2-

Vom Sinn der Abstraktion:

"Deduktion" { wird einem ein abstrakter Zusammenhang genannt, so kann man ihn verstehen, indem man ihn auf Beispiele zurückführt und diese studiert.
[Wenn man z.B. den Satz des Pythagoras erfährt, kann man ihn z.B. am rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten der Länge 3 und 4 überprüfen.]

"Induktion" { studiert man sehr viele Beispiele, so soll eine Abstraktion dazu helfen, einen gefundenen Zusammenhang für alle machbaren Beispiele zu formulieren.
[Nachdem er viele rechtwinklige Dreiecke und seine Seitenlängen studiert hat, wird ein denkender Mensch irgendwann den Satz des Pythagoras formulieren.]

Das Zusammenspiel zwischen Deduktion und Induktion ist Wesen des wissenschaftlichen Denkens an sich. Die Mathematik erlaubt es, mit ihrer abstrakten Formelsprache ("Formalismus"), hier unterstützend zu wirken: Zur Deduktion braucht man nur erlaubte Objekte einsetzen, und sie ist so gemacht, dass man immer etwas einsetzen kann. Dafür dienen Variable, das sind Platzhalter, für die dazugesagt werden muss, welche Objekte eingesetzt werden dürfen, Bsp.: Ist x eine gerade Quadratzahl, dann ist x durch 4 teilbar. Zur Induktion würde man nach vielen Beispielen einen abstrakten Zusammenhang exakt formulieren. Dieser braucht noch lange nicht richtig sein, es wird ein Beweis zur Verifizierung erforderlich sein, dazu später mehr. Natürlich ist das Studium von Beispielen nicht der einzige Weg, Zusammenhänge zu finden, sondern auch die Regeln der Aussagenlogik sollen dafür erlaubt sein.

Wir formulieren zuerst, was ein guter abstrakter Formalismus idealerweise leisten soll:

Ziele eines abstrakten Formalismus:

- alles soll unmissverständlich sein [„Tafelebene", „Verschiebung des Raums": ??]
- seine Spielregeln so klar, dass alles nachvollziehbar sein soll

Starke Vereinfachungen sind dabei nötig, die beschriebenen Objekte werden so auf ihre zu thematisierenden Aspekte reduziert. [Ob ein rechtwinkliges Dreieck grün ist, spielt für den Satz des Pythagoras keine Rolle.]

Vom Sinn von Genauigkeit und sorgfältiger Sprache:

Wozu die Pedanterie im Studium mit exaktem Formalismus, mit dem z.B. die Zahlensysteme $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ erklärt werden? Kann man nicht wie in der Schule einfach darauf losrechnen? Wenn Sie einen hohen Turm aus Bierdeckeln bauen möchten, muss jeder einzelne Bierdeckel genau sitzen, sonst fällt der ganze Turm sehr leicht zusammen! In der Mathematik muss jeder Zwischenschritt stimmen, sonst kann man leicht auf falsche Aussagen wie das Ergebnis $0=1$ kommen. z.B.: $-2 = \sqrt[3]{(-8)} = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

also ist $0 = 2+(-2) \underset{\uparrow}{=} 2+2 = 4$, also $0=4$, also (nach Teilen durch 4) $0=1$???

$-2=2$ einsetzen

Also muss z.B. genau gesagt werden, was Wurzelausdrücke / Potenzgesetze sind. Die Begriffe und (Rechen-)regeln, die eingesetzt werden müssen unmissverständlich klar sein, d.h. u.a., dass ihr <u>Geltungsbereich</u> genau genannt wird!

Worauf wird die Mathematik nun aufgebaut? Auf einer bestimmten Liste von Axiomen, üblicherweise dem ZFC-Axiomensystem.

Nach einer Idee des Mathematikers David Hilbert zu Beginn des 20. Jahrhunderts hat man folgende Ansprüche, welche Eigenschaften ein <u>Axiomensystem</u> haben soll:

Hilberts Idee: Axiomensysteme sollten sein:

- <u>widerspruchsfrei</u>, d.h. es soll aus einem Satz nicht auch seine Negation herleitbar sein,
- <u>unabhängig</u>, d.h. jedes einzelne Axiom soll nicht aus den anderen des Systems herleitbar sein,
- <u>vollständig</u>, d.h. für jeden in der mathematischen Sprache formulierbaren Satz soll der Satz selbst oder seine Negation herleitbar sein
- <u>kategorisch</u>, d.h. alle Beispiele für ein Axiomensystem sind im Prinzip / von der Struktur her gleich.

Es gibt Grenzen der Axiomatik: Kurt Gödel zeigte um 1930 den <u>Unvollständigkeitssatz</u>: In jedem mathematischen Axiomensystem existieren entweder wahre, jedoch nicht beweisbare Aussagen, oder aber das System ist widersprüchlich.

Eine mathematische wahre Aussage bezeichnen wir als (mathematischen) Satz.

Bsp.: Satz: Gerade Quadratzahlen sind durch 4 teilbar.

Dabei wird bereits vorausgesetzt, dass die Begriffe "gerade", "Quadratzahl", "teilbar", ja sogar die Zahl "4", bekannt sind und vorher sauber definiert wurden. Varianten des "Satzes" sind:

- Theorem: ein besonders wichtiger Satz,
- Lemma: ein Hilfssatz, welcher ein Zwischenresultat ausdrückt,
- Korollar: ein Ergebnis, der ohne großem Beweisaufwand aus einem vorangehenden Satz erhältlich ist (griech. corollarium = Zugabe, Geschenk)
- Proposition: ein Satz, der eher ein Hilfsergebnis ausdrückt

Def.: Eine Aussage besteht aus vollständig definierten Ausdrücken (die aus mathem. Objekten bestehen) und ist entweder wahr (w) oder falsch (f).

Von Aussagen der Umgangssprache kann der Wahrheitsgehalt nicht immer eindeutig festgestellt werden, Bsp.: Es regnet in Paris.

Wenn eine Aussage mit logischen Schlüssen als wahr erkannt wird, sprechen wir von einem Beweis. Ein Beweis ist also eine Folge von logischen Schlüssen, jeder auf den vorherigen aufbauend, an dessen Ende die zu beweisende Aussage steht.

Welche Regeln des Schlussfolgerns dabei erlaubt sind, erarbeiten wir hier.

Wir beachten: Beweise sind für Menschen gemacht, es genügt, nur so sehr ins Detail zu gehen, dass ein Mensch den Beweis versteht. Im Prinzip soll ein Beweis aber auch durch Ausführen aller Details sogar von Maschinen verifizierbar sein, ist dann aber durch vollen Formalismus gegeben. So einen Computerbeweis versteht normalerweise kein Mensch mehr und wird von Mathematikern auch nur m. E. akzeptiert.

Sobald eine Formel zu kompliziert wird, ist sie nicht mehr so leicht zu verstehen, z.B. bedeutet "$\forall t \in \mathbb{R}: (t>0 \vee t<0 \vee t=0) \wedge \neg(t>0 \wedge t<0) \wedge \neg(t>0 \wedge t=0) \wedge \neg(t<0 \wedge t=0)$", dass jede reelle Zahl positiv, negativ oder Null ist, aber keine zwei Eigenschaften gleichzeitig eintreten können.

§2: Grundlegende Aussagenlogik

Wir möchten allgemein über Aussagen und ihre Wahrheitswerte sprechen.
Dazu nennen wir sie stellvertretend $A, B, C, \ldots$ und nehmen darauf Bezug:
Ist eine Aussage A wahr, sagen wir auch kurz "<u>A gilt</u>", ansonsten "<u>A gilt nicht</u>".
Dabei sind $A, B, \ldots$ gewissermaßen Variablen, in die konkrete Aussagen eingesetzt werden können, um Beispiele zu erhalten.

<u>Bsp.</u>: "2 ist gerade" gilt, "2 teilt 4" ist wahr, "18 ist Quadratzahl" ist falsch,
A ist eine Aussage. "A ist eine Aussage" ist eine Aussage.
↑(Im nachfolgenden Satz wurde für A etwas eingesetzt, nämlich die Aussage A <u>selbst</u>, beachten Sie, dass ich zur Klarstellung Gänsefüßchen gesetzt habe.)

Manche Mathematiker nennen Aussagen mit Aussagevariablen noch genauer eine <u>Aussageform</u>, diese haben erst nach Einsetzen einen festgelegten Wahrheitswert.

<u>Aber:</u> Aussagen mit Selbstbezug sollen nicht zugelassen werden.
Bsp.: "Diese Aussage ist falsch." macht keinen Sinn!

<u>Verknüpfung von Aussagen:</u> "und", "oder", "nicht"
in Zeichen: $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$

– per <u>Wahrheitstafel</u> können diese Verknüpfungen erklärt werden in Abhängigkeit der Wahrheitswerte von A und B, welche beliebige Aussagen sein können.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$
w	w	w	w	f
w	f	f	w	f
f	w	f	w	w
f	f	f	f	w

<u>Negation:</u> – hierbei ist $\neg A$ wahr, genau dann wenn A falsch ist (lies "nicht A")
<u>Konjunktion:</u> – hierbei ist $A \wedge B$ genau dann wahr, wenn A und B beide wahr sind, ansonsten ist "$A \wedge B$" falsch (lies "A und B"),
<u>Disjunktion:</u> – hierbei ist $A \vee B$ genau dann falsch, wenn A und B beide falsch sind, ansonsten ist "$A \vee B$" wahr (lies "A oder B"). Hier ist <u>nicht</u> "entweder A oder B" gemeint, was falsch wäre wenn A und B beide wahr wären; es ist eine (nützliche) mathematische Konvention, "oder" immer so zu verstehen wie hier.

<u>Bemerkung:</u> • Die Aussagen $A \vee \neg A$ und $\neg(A \wedge \neg A)$ sind immer wahr!
• Die Reihenfolge ist unerheblich: $A \wedge B$ bedeutet $B \wedge A$, $A \vee B$ bedeutet auch $B \vee A$

Aus diesen Grundverknüpfungen lassen sich alle anderen wichtigen Aussagenverknüpfungen aufbauen. Und vielerlei komplizierte Ausdrücke aufschreiben, wie z.B. $(A \vee B) \vee (C \wedge (\neg D)))$, wobei es auf die Klammerung ankommt, welche die Reihenfolge der Verknüpfungen klarstellt.

So ist etwa $A \vee (B \vee (C \wedge (\neg D))$ eine andere Aussage. Damit man nicht soviele Klammern schreiben muss und diese Formeln übersichtlicher schreiben kann, gibt es die folgenden Klammersetzungsregeln:

$\neg$ bindet stärker als $\wedge$
$\wedge$ bindet stärker als $\vee$

Damit kann $(A \vee B) \vee (C \wedge (\neg D)))$ einfacher als $A \vee B \vee C \wedge \neg D$ geschrieben werden. Zur Verdeutlichung/Klarstellung dürfen die Klammern natürlich trotzdem geschrieben werden. Weil $(A \vee B) \vee C$ dieselbe Aussage ist wie $(A \vee B) \vee C$ (überprüfen Sie das mit den Wahrheitswerten!), darf auch $A \vee B \vee C$ dafür geschrieben werden, und analog geht das ebenso mit $A \wedge B \wedge C$. (Das Wort "analog" wird immer dann benutzt, wenn ein Sachverhalt genauso richtig ist nach leichter Abänderung, hier nach Ersetzen von "$\vee$" durch "$\wedge$". Dieses Wort wird häufig benutzt, es spart Wiederholungen. Aber es sollte nur eingesetzt werden, wenn wie hier unmissverständlich klar ist, was gemeint ist.)

Die Implikation/Schlussfolgerung/Folgerung zweier Aussagen A und B ist die Aussage $\neg A \vee B$ und wird bezeichnet mit dem Symbol $A \Rightarrow B$, sprich "aus A folgt B", "A impliziert B", "wenn A gilt, dann gilt B", "A ist hinreichend für B", "B ist notwendig für A", "damit B gilt, ist hinreichend, dass A gilt", "wenn A gilt, muss B notwendig auch gelten", ...
und hat die Wahrheitswerte laut Tabelle:

A	B	$A \Rightarrow B$ bzw. $\neg A \vee B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Laut Bedeutung von $\neg A \vee B$ gilt:
Ist A wahr, also $\neg A$ falsch), dann muss B stimmen, damit die Aussage insgesamt stimmt. Damit wurde "wenn A wahr ist, dann gilt B" ausgesagt, also eine Folgerung ausgedrückt. Ist A falsch, ist $\neg A \vee B$ wahr, egal, was B ist: "ex falso quodlibet" = "aus Falschem folgt Beliebiges".

LG1

-7-

Wir wollen "ex falso quodlibet" so zulassen: wenn wir es anders machen wollten, also z.B. "$A \Rightarrow B$" für falsch erklären, falls A falsch und B wahr/falsch ist hätte man andere Aussagen erklärt und nichts Neues, vgl. diese Tabelle:

A	B	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	B	$A \wedge B$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	f	w	f
f	f	w	f	f

$\}$ alle Mögl. für andere Setzung

Aber auch sonst ist "ex falso quodlibet" ein nützliches Prinzip: Soll "$\Rightarrow$" Bestandteil von Formeln werden, ist es dann mit unserem Einsetzprinzip kompatibel: Die Formel "$\forall x \in \mathbb{R}: x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$" ist richtig, egal welche reelle Zahl für x eingesetzt wird, etwa

$x=5: \underbrace{5>3}_{w} \Rightarrow \underbrace{5^2>9}_{w}$, $\quad x=2: \underbrace{2>3}_{f} \Rightarrow \underbrace{2^2>9}_{f}$, $\quad x=-4: \underbrace{-4>3}_{f} \Rightarrow \underbrace{(-4)^2>9}_{w}$

Die Äquivalenz zweier Aussagen ist die Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, d.h. sie ist wahr genau dann, wenn A und B dieselben Wahrheitswerte besitzen. Wir schreiben $A \Leftrightarrow B$ für diese Aussage und lesen dafür "A ist genau dann wahr, wenn B gilt", "A gilt genau dann, wenn B gilt", "A gdw. B", "A ist dann und nur dann wahr, wenn B wahr ist", "A ist äquivalent zu B", "A ist notwendig und hinreichend für B", ...

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Anhand der Wahrheitstafel ist erkennbar, dass $A \Leftrightarrow B$ dieselben Wahrheitswerte wie $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ hat; wir werden dies gleich noch auf anderem Wege sehen.

Noch ein Paar Begriffe in diesem Zusammenhang: in einer Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ heißt $A \Rightarrow B$ die Hinrichtung, und $B \Rightarrow A$, was auch als $A \Leftarrow B$ geschrieben werden kann, die Rückrichtung. Wenn eine Implikation $A \Rightarrow B$ vorliegt, wie z.B. $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$, muss noch lange nicht die Rückrichtung gelten. Oft wird dies gefragt, da Äquivalenzen eine genauere Aussage ermöglichen, wie z.B. $(x > 2 \vee x < -2) \Leftrightarrow x^2 > 4$.

Zum Sparen von Klammern gibt es für $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ folgende Klammersetzungsregeln:

| $\vee$ bindet stärker als $\Rightarrow$ bzw. $\Leftarrow$, |
| $\Rightarrow$ bzw. $\Leftarrow$ bindet stärker als $\Leftrightarrow$ |

Weiter lassen Äquivalenzen die Formulierung zu, dass zwei Formeln in Aussagenvariablen dieselben Wahrheitswerte haben, z.B. in $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$.

Dies nutzen wir jetzt, um wichtige Logikregeln zu formulieren und auch zu beweisen.

1. Satz: Es gelten die folgenden Logikregeln für beliebige Aussagen A, B, C:

(1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$

(2) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ (3) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

(4) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (5) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(6) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(7) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Distributivgesetze

Beweis: Zu (1): Ist A wahr, dann ist $\neg A$ falsch, also $\neg(\neg A)$ wieder wahr.
Ist A falsch, dann ist $\neg A$ wahr, also $\neg(\neg A)$ wieder falsch.
Also haben A und $\neg(\neg A)$ dieselben Wahrheitswerte, egal was A ist.

Zu (2) & (3): Sind ebenso klar, auch anhand der Wahrheitstafeln.

Zu (4): Sind A, B beide wahr, ist $\neg(A \wedge B)$ falsch und ebenso $\neg A \vee \neg B$.
Sind A, B beide falsch, ist $\neg(A \wedge B)$ wahr und ebenso $\neg A \vee \neg B$.
Haben A, B verschiedene Wahrheitswerte, ist $\neg(A \wedge B)$ wahr und ebenso $\neg A \vee \neg B$.
In jedem Fall haben $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ dieselben Wahrheitswerte, egal was A, B ist.

Zu (5): Haben $\neg(A \vee B) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg(\neg A) \vee \neg(\neg B)) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg(\neg A \wedge \neg B)) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg A \wedge \neg B$.

Zu (6): Checken der Wahrheitswerte fällt am leichtesten:

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Zu (7): $A \vee (B \wedge C) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg(A \vee (B \wedge C))) \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \wedge \neg(B \wedge C)) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C))$
$\overset{(6)}{\Leftrightarrow} \neg((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C)) \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg C)$
$\overset{(4)}{\Leftrightarrow} (\neg(\neg A) \vee \neg(\neg B)) \wedge (\neg(\neg A) \vee \neg(\neg C)) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (A \vee B) \wedge (A \vee C)$. $\square$

(Zeichen für ein Beweisende)

Dies war schon unser erster Beweis. Beachten Sie, dass wir für Regeln (5) und (7) im Beweis vorangehende Ergebnisse benutzt haben, was sehr elegant ist: wir müssen derart nicht mehr die Wahrheitstabellen durchgehen. Dabei ist für Sie nützlich, dass ich die verwendeten Regeln dazugenannt habe. Für (6) habe ich keinen einfacheren Beweis, der nur mit $\neg, \vee, \wedge$ auskommt, gefunden.

Nun wollen wir noch Logikregeln mit "$\Rightarrow$" und "$\Leftrightarrow$" aufstellen.
Zunächst halten wir folgende Umschreibungen fest:

- $(A\Rightarrow B) \underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \neg A \lor B \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg A \lor \neg(\neg B) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \neg(A\land\neg B)$
- $(A\Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A\Rightarrow B)\land(B\Rightarrow A) \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} (\neg A\lor B)\land(\neg B\lor A)$

$$\underset{\text{Distr.}}{\Leftrightarrow} (\neg A\lor B)\land\neg B \lor (\neg A\lor B)\land A$$
$$\Leftrightarrow \neg A\land\neg B \lor \underbrace{B\land\neg B}_{f} \lor \underbrace{\neg A\land A}_{f} \lor B\land A$$
$$\Leftrightarrow (\neg A\land\neg B)\lor(A\land B).$$

Die letzte Zeile interpretieren wir als "A und B haben beide denselben Wahrheitswert."

2. Satz: Es gelten die Logikregeln für beliebige Aussagen A, B, C:

(1) $(A\Rightarrow B)\land A \Rightarrow B$ — modus ponens
(2) $(A\Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B\Rightarrow\neg A)$ — Kontrapositionsregel
(3) $(A\Rightarrow B)\land\neg B \Rightarrow \neg A$ — modus tollens
(4) $(A\Rightarrow B)\land(B\Rightarrow C) \Rightarrow (A\Rightarrow C)$ — Transitivität von "$\Rightarrow$"
(5) $(A\Leftrightarrow B)\land(B\Leftrightarrow C) \Rightarrow (A\Leftrightarrow C)$ — Transitivität von "$\Leftrightarrow$"

Vor dem Beweis zur Bedeutung/Interpretation dieser Regeln:
Zu (1): Das ist die "Schlussfolgerung" schlechthin: Ist $A\Rightarrow B$ bewiesen, d.h. wahr unter der Annahme, dass A wahr sei, und ist A wahr, muss auch B wahr sein. Man sollte also sagen, dass die Behauptung B wahr ist unter der Voraussetzung A.
Zu (2): Die Begründung von "$A\Rightarrow B$" kann indirekt erfolgen, wenn ein Beweis der Richtigkeit von $\neg B\Rightarrow\neg A$ vorliegt, wie folgt: "$A\Rightarrow B$ gilt, denn wenn ansonsten B falsch wäre (Achtung, Konjunktiv!), dann wäre auch schon A falsch gewesen (schon wieder Konjunktiv!). Wir haben aber die Annahme A für $A\Rightarrow B$ gemacht, daher kann also B nicht falsch sein."
Bsp: "Wenn es regnet, dann ist die Straße nass" ist gleichbedeutend zu
"Wenn die Straße trocken ist, dann regnet es nicht."
Zu (4): Die Schlusskette $(A\Rightarrow B)\land(B\Rightarrow C)$ zeigt $A\Rightarrow C$.
Diese schreibt man kurz als $A\Rightarrow B\Rightarrow C$.
⚠ Vorsicht: Dies ist eine andere Aussage als $(A\Rightarrow B)\Rightarrow C$ oder $A\Rightarrow(B\Rightarrow C)$!!
Zu (5): Analoges gilt für Äquivalenzketten $A\Leftrightarrow B\Leftrightarrow C$. Vgl. Beweise oben!

Beweis des 2. Satzes:

Zu (1): Denn in den Zeilen der Wahrheitstabelle für $A\Rightarrow B$, wo $A\Rightarrow B$ wahr ist und ebenso A wahr (das ist dort nur die 1. Zeile!), ist auch B wahr.

Oder so: $((A\Rightarrow B)\wedge A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(\neg(A\Rightarrow B)\vee\neg A\vee B)\Leftrightarrow(\neg(\neg A\vee B)\vee\neg A\vee B)$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee\neg A\vee B\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee\neg(A\wedge\neg B)$, ist immer wahr.

Zu (2): $(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\Leftrightarrow(B\vee\neg A)\Leftrightarrow\neg(\neg B)\vee\neg A\Leftrightarrow(\neg B\Rightarrow\neg A)$.

Zu (3): $(A\Rightarrow B)\wedge\neg B\overset{(2)}{\Leftrightarrow}(\neg B\Rightarrow\neg A)\wedge\neg B\overset{(1)}{\Rightarrow}\neg A$.

Zu (4): $((A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow C))\Leftrightarrow\neg((\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee C))\vee(\neg A\vee C)$

$\Leftrightarrow\underline{A\wedge\neg B}\vee\underline{B\wedge\neg C}\vee\neg A\vee C\Leftrightarrow(A\wedge\neg B\vee\neg A)\vee(B\wedge\neg C\vee C)$

$\Leftrightarrow((A\vee\neg A)\wedge(\neg B\vee\neg A))\vee((\neg C\vee C)\wedge(B\vee C))$

$\Leftrightarrow\neg B\vee\neg A\vee B\vee C\Leftrightarrow(B\vee\neg B)\vee(\neg A\vee C)$, ist immer wahr.

Zu (5): $(A\Leftrightarrow B)\wedge(B\Leftrightarrow C)\Rightarrow(A\Leftrightarrow C)$ gilt,

denn $(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)\wedge(B\Rightarrow C)\wedge(C\Rightarrow B)$

$\Leftrightarrow(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow C)\wedge(C\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)\overset{(4)}{\Rightarrow}(A\Rightarrow C)\wedge(C\Rightarrow A)\Leftrightarrow(A\Leftrightarrow C)$. □

Bemerkung: Haben wir hier nicht die zu zeigenden Aussagen beim Beweisen bereits verwendet? Ein berechtigter Einwand! Generell darf keine Vermischung von Objekt- und Metasprache erfolgen, um die Beweise zu führen. Dies kann hier aber noch sauberer argumentiert werden, was wir der Übersichtlichkeit halber lassen.

Kurze Theorie mathematischer Beweise: Bewiesen werden soll ein Satz, der als Implikation formuliert wurde, d.h. in der Form: "Satz: $A\Rightarrow B$"

Dabei heißt A die Voraussetzung, und B die Behauptung des Satzes.

Man unterscheidet die folgenden zwei Arten von Beweisen:

1. direkter Beweis: Angabe einer Schlusskette $A\Rightarrow C_1\Rightarrow C_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow C_n\Rightarrow B$
2. indirekter Beweis: Hier gibt es wieder zwei Arten:

- Kontrapositionsbeweis: direkter Beweis von $\neg B\Rightarrow\neg A$
- Widerspruchsbeweis: direkter Beweis von $A\wedge\neg B\Rightarrow C$,
  wobei C falsch wie z.B. $A\wedge\neg A$, $0=1$, ...

– Dies zeigt $A\Rightarrow B$, da $(A\wedge\neg B\Rightarrow\underset{f}{C})\Leftrightarrow(\underbrace{\neg(A\wedge\neg B)}_{A\Rightarrow B}\vee\underset{f}{C})\Leftrightarrow(A\Rightarrow B)$.

– Wenn $C=\neg A$ ist ebenso, da $(A\wedge\neg B\Rightarrow\neg A)\underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}(\neg(A\wedge\neg B)\vee\neg A)\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}(A\Rightarrow B)$

Gerade das indirekte Schließen in Widerspruchsbeweisen werden wir noch genauer in Beispielen behandeln, speziell auch Tipps zum Aufschreiben geben.