Vorlesung "Logische Grundlagen"

LG10: Das Auswahlaxiom

Stichworte: Familien, beliebige (Durch-) Schnitte/Vereinigungen/Produkte, Auswahlaxiom, dazu äquivalente Formulierungen (surj. ⇒ ∃ Rechtsinverse, bel. Produkte nicht leerer Mengen sind $\neq \emptyset$, Lemma von Zorn, jeder VR hat eine Basis), Fixpunktsatz von Bourbaki impliziert mit dem Auswahlaxiom das Lemma von Zorn

§1: Familien, beliebige Schnitte/Vereinigungen/Produkte

1, Def.: Für eine bel. Menge $X \neq \emptyset$ und eine Abb. $\xi : \mathbb{N} \to X$ schreibt man auch $\xi(j) = \xi_j$ und $\xi = (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und nennt ξ eine Folge (in X). $\mathbb{N}$ heißt dann die Indexmenge der Folge.

2. Def.: Ist J irgendeine Menge ($\neq \emptyset$) und $\xi : J \to X$ eine Abb., so schreibt man $\xi(j) = \xi_j$ und $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$ und nennt ξ eine Familie (in X) mit Indexmenge J.

Bem.: Für eine Familie $(\xi_j)_{j \in J}$ kann J endlich oder unendlich sein. Ist J endlich, etwa $J = \{j_1, \dots, j_n\}$, dann ist $(\xi_j)_{j \in J}$ ein n-Tupel und schreibt $(\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_n})$.

3. Def.: Ist $X \neq \emptyset$ eine Menge (von Mengen), so gilt:

$$\bigcap X := \{a \mid \forall A \in X : a \in A\},$$

diese Menge heißt Durchschnitt von X.

Bem.: Alle Elemente, die in allen Elementen von X vorkommen, werden zu $\bigcap X$ zusammengefasst.

Bsp.: $\bigcap \{P, Q\} = P \cap Q$, $\bigcap \{P\} = P$, $\bigcap \{P, \{Q\}, \{\{R\}\}\} = P \cap \{Q\} \cap \{\{R\}\}$.

Notation: Ist $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen (X_j sind Mengen), so schreibt man

$$\bigcap_{j \in J} X_j = \bigcap \{X_j \mid j \in J\} = \{a \mid \forall j \in J : a \in X_j\}$$

4. Def.: Ist $X \neq \emptyset$ eine Menge (von Mengen), so gilt:

$$\bigcup X := \{a \mid \exists A \in X : a \in A\},$$

diese Menge heißt Vereinigung von X.

Bem.: die Elemente aller Elemente von X werden zu $\bigcup X$ zusammengefasst.

<u>Bsp.:</u> $\bigcup\{P,Q\} = P \cup Q$, $\bigcup\{P\} = P$, $\bigcup\emptyset = \emptyset$, $\bigcup\{\emptyset\} = \emptyset$,
$\bigcup\{P, \{Q\}, \{\{R\}\}\} = P \cup \{Q\} \cup \{\{R\}\}$.

<u>Notation:</u> Ist $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von Mengen (X_j sind Mengen), so schreibt man
$$\bigcup_{j\in J} X_j = \bigcup\{X_j \mid j\in J\} = \{a \mid \exists j\in J : a\in X_j\}$$

5. <u>Def.:</u> • Sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von Mengen.
Das <u>Kartesische Produkt</u> $\prod_{j\in J} X_j$ besteht aus allen Familien $(\xi_j)_{j\in J}$ mit $\xi_j \in X_j$.

• Falls J endlich ist, $J=\{1,2,\dots,n\}$, schreibt man auch (wie gehabt)
$$\prod_{j\in J} X_j = \prod_{j=1}^{n} X_j = X_1 \times \dots \times X_n,$$
die Elemente $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ mit $\xi_j \in X$ sind n-Tupel.
Ist zusätzlich $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$, schreibt man auch $\prod_{j=1}^{n} X = \underbrace{X\times\dots\times X}_{n\text{ mal}} = X^n$.
Ein anderes gebräuchliches Zeichen für $\prod_{j\in J}$ ist $\bigtimes_{j\in J}$.

Wir benötigen diese Grundbegriffe für beliebige Indexmengen zur Formulierung des Auswahlaxioms, und um es genauer studieren zu können.

§2: Das Auswahlaxiom

<u>Auswahlaxiom:</u> Ist $X \neq \emptyset$ eine Menge und $P := \{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset\}$ die Menge aller nichtleeren Teilmengen von X, dann gibt es eine Funktion (die wir Auswahlfunktion nennen) $c: P \to X$, die jeder Menge $A \in P$ ein Element $c(A)$ zuordnet („auswählt").

Dieses Axiom haben wir bereits in LG 7 benutzt, um zu zeigen, dass jede surjektive Abb. eine Rechtsinverse besitzt. Umgekehrt kann man aus dieser Aussage wiederum das Auswahlaxiom herleiten.
<u>Bem.:</u> Im Auswahlaxiom geht es um Teilmengen von X. Teilmengen der Potenzmenge $\mathcal{P}(X) = \{A \subseteq X\}$ werden auch <u>Systeme von Teilmengen</u> von X genannt.

Wir lernen jetzt noch weitere Umformulierungen des Axioms kennen.
Zunächst zeigen wir mit dem Auswahlaxiom folgendes.

<u>Satz:</u> Ist $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie nichtleerer Mengen, dann ist $\prod_{j\in J} X_j$ nicht leer.

<u>Bew.:</u> Sei $X = \bigcup_{j\in J} X_j$, sei $P = \mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\}$ und sei $c: P \to X$ eine Auswahlfunktion. Nach Vor. gilt $X_j \in P$ für alle $j\in J$. Sei $\xi_j = c(X_j)$. Dann gilt $\xi_j \in X_j$ für jedes $j\in J$, also $(\xi_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j$. □

- <u>Bem.:</u> Auch die Umkehrung, dass aus der Aussage des Satzes wieder das Auswahlaxiom folgt, kann gezeigt werden.
- <u>Bem.:</u> Der Satz zeigt, dass es für jede Folge $X_1, X_2, \ldots$ nichtleerer Teilmengen einer Menge X eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ von Elementen gibt, d.h. mit $x_j \in X_j$ für alle $j\in\mathbb{N}$. Dieses "Folgenauswahlaxiom" wird vom Beginn der Analysis an ständig (intuitiv) verwendet, z.B. im Beweis, dass jede folgenstetige Funktion das ε-δ-Kriterium erfüllt. Sogesehen ist die Verwendung des Auswahlaxioms an vielen Stellen der gängigen Mathematik "versteckt", meist so, dass man es kaum noch bemerkt.

<u>Problem des Auswahlaxioms:</u> Die Aussage des Axioms ist eine reine Existenzaussage, es kann keineswegs eine explizite Auswahlfunktion angeben werden, und das ist dann auch mit den Konsequenzen des Auswahlaxioms so, dass diese reine Existenzaussagen liefern ohne jede Konstruktionsvorschrift. Das mag manchmal unbefriedigend sein. Besonders krass ist das wohl bei der Konsequenz, dass jeder Vektorraum (auch unendlichdimensionale!) eine Basis hat: man kann i.a. keine Basen in beliebigen Vektorräumen angeben, obwohl es sie laut Auswahlaxiom gibt! Wie man dieses Ergebnis aus dem Auswahlaxiom herleitet, werden wir nun kennenlernen.

Dazu zunächst wiederum eine weitere Umformulierung, die auch als Zornsches Lemma bzw. Lemma von Zorn bekannt ist. Es handelt von (Halb-) und total geordneten Mengen, vgl. LG5. Wir brauchen noch zusätzlich:

6. <u>Def.:</u> Ist M bzgl. $\leq$ (halb-)geordnet, so heißt eine bzgl. $\leq$ totalgeordnete Teilmenge T von M eine <u>Kette</u>. (Wir haben solche Mengen in LG5 schon anschaulich "Kette" genannt.)

<u>Lemma von Zorn</u>: Sei M eine Menge $\neq \emptyset$ mit (Halb-)ordnung $\leq$ so, dass es für jede Kette $T \subseteq M$ ein $x \in M$ gibt $x \geq y$ für alle $y \in T$.
(M.a.W.: jede Kette habe eine obere Schranke in M.)
Dann hat M (mindestens) ein maximales Element.

<u>Bem.</u>: Auch hier ist die Behauptung eine reine Existenzaussage. Eine Anleitung zur Konstruktion eines maximalen Elements liefert das Lemma nicht.

<u>Satz</u>: Es gilt: Auswahlaxiom $\Longleftrightarrow$ Lemma von Zorn.

<u>Bw.</u>: Wir zeigen nur „$\Rightarrow$". Dazu benötigen wir im Beweis den <u>Fixpunktsatz von Bourbaki</u> (s.u.).

Sei nun zum Beweis des Lemmas von Zorn $M \neq \emptyset$ eine geordnete Menge.
Betr. das System $S \subseteq \mathcal{P}(M)$ aller Ketten von M,
bzgl. der Inklusion "$\subseteq$" ist S geordnet. Also: $S = \{K \subseteq M \mid K \text{ Kette}\}$.

"Kette von Ketten" ...

1 • 2 • 3 K_1
0 • 1 • 2 • 3 • 4 K_2
0 • 1 • 2 • 3 • 4 • 5 K_3
⋮ usw.

Dann hat jede Kette in S ein Supremum (= kleinste obere Schranke in S), denn das Supremum über ein totalgeordnetes System $\mathcal{J} \subseteq S$ von Ketten ist einfach ihre Vereinigung $\bigcup_{K \in \mathcal{J}} K = \sup \mathcal{J}$ (ist ja Kette von M, also $\in S$).

Def. nun eine Abb.

$$f: S \to S,\ K \mapsto f(K) := \begin{cases} K \cup \{x\}, & \text{falls } x \notin K \text{ ex. so, dass } K \cup \{x\} \text{ Kette}, \\ K, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierfür benötigen wir das <u>Auswahlaxiom</u>, um für alle K unter den jeweils möglichen x eines auszuwählen. Nach dem <u>Fixpunktsatz von Bourbaki</u> (s.u.) hat nun f einen Fixpunkt, es gibt also eine maximale Kette $K_{max} \subseteq M$. Eine obere Schranke einer solchen maximalen Kette ist dann notwendig ein maximales Element von M. $\square$

<u>Fixpunktsatz von Bourbaki</u>: Ist S eine bzgl. $\leq$ geordnete Menge, in der jede Kette ein Supremum in S besitzt, so hat jede Abbildung $f: S \to S$ mit der Eigenschaft $f(x) \geq x$ für alle $x \in S$ einen Fixpunkt $s \in S$, d.h. es ist $f(s) = s$.

Der Beweis dieses Fixpunktsatzes ist etwas aufwändiger und kommt im Anschluss an folgendes Korollar zum Zornschen Lemma.

Zusammenhänge: Auswahlaxiom $\Downarrow$ Zornsches Lemma $\Leftarrow$ Fixpunktsatz von Bourbaki

$\Downarrow$

Jeder VR hat eine Basis.

__Satz:__ Jeder Vektorraum V hat eine Basis.

Wir benutzen dafür die folgende Charakterisierung des Begriffs "Basis":

__Aus Lin.Alg.I:__ $S \subseteq V$ ist Basis $\Leftrightarrow$ S ist maximale lin. unabh. Teilmenge von V,
d.h. S ist lin. unabh. und jede Obermenge von S ist lin. abh.

__Bew. des Satzes:__

Sei M die Menge der lin. unabh. Teilmengen von V, mit der Halbordnung "$\subseteq$".
Das Zornsche Lemma liefert die Existenz einer maximalen lin. unabh. Teilmenge von M, also eine Basis, sofern die Voraussetzungen erfüllt sind, welche wir nur noch zu überprüfen brauchen:

Es bleibt z.z.: Ist $T \subseteq M$ total geordnet bzgl. $\subseteq$, d.h. eine Kette in M, so gibt es eine lin. unabh. Teilmenge $S \subseteq V$ mit $S' \subseteq S$ für alle $S' \in T$.
Wähle $S := \bigcup_{S' \in T} S'$, dann gilt $S' \subseteq S$ für alle $S' \in T$.
Es bleibt z.z.: S ist lin. unabh., d.h. $S \in M$.

$\ulcorner$ Dazu seien $v_1, \dots, v_n \in S$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ geg. mit $\lambda v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$.
Jedes v_i liegt in einem $S_i \in T$. Da T Kette ist, gilt nach Umnumerierung $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_n$, also sind $v_1, \dots, v_n \in S_n$.
Da S_n lin. unabh. ist, folgt aus $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ bereits, dass alle $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ sind.
Also ist S lin. unabh. $\lrcorner$ $\square$

__Bew. des Fixpunktsatzes von Bourbaki:__ Seien S und f laut Vor. gegeben.

1. __Bem.:__ S besitzt notwendig ein kleinstes Element, nämlich $k = \sup \emptyset$, denn $\emptyset$ ist Kette.

2. Nur für den Beweis benötigen wir folgende Definition: Eine Teilmenge $T \subseteq S$ heißt Turm (in Bezug auf f) genau dann, wenn gilt: a) das kleinste Element k von S gehört zu T, b) aus $t \in T$ folgt $f(t) \in T$, c) ist $K \subseteq T$ eine Kette, so gehört auch $\sup K$ zu T.

3. <u>Bem.:</u> Es reicht nun, einen Turm T zu finden, der auch Kette ist, denn dann ist $\sup T$ das größte Element von T und damit ein Fixpunkt von f.
Der Schnitt über alle Türme in S ist offensichtlich der bzgl. "$\subseteq$" kleinste Turm von S, wir nennen ihn R. <u>Beh.:</u> R ist Kette. (Ist dies gezeigt, sind wir fertig.)
<u>Def.:</u> Ein El. $c \in R$ des kleinsten Turmes R heißt <u>eng</u>, falls $\forall a \in R: a < c \Rightarrow f(a) \leq c$.
$[\Leftrightarrow (f(a) > c \Rightarrow a \geq c)]$

4. <u>Beh. (1):</u> Sei $c \in R$ eng, dann: $\forall x \in R: x \leq c \vee f(c) \leq x$.
<u>Bew.:</u> Gen. z.z.: $R_c = \{x \in R \mid x \leq c \vee f(c) \leq x\}$ ist Turm. ⌜Dann $R_c = R$⌟
<u>Zu a):</u> Klar ist $k \in R_c$. <u>Zu c):</u> Ist $K \subseteq R_c$ eine Kette, so folgt $\sup K \in R_c$.
<u>Zu b):</u> aus $t \in R_c$ folgt $f(t) \in R_c$, was aus "c eng" folgt: $\underbrace{t < c}_{\substack{\Rightarrow f(t) \leq c \\ \Rightarrow f(t) \in R_c}} \vee \underbrace{f(c) \leq t}_{\substack{\Rightarrow f(c) \leq f(t) \\ \Rightarrow f(t) \in R_c}} \underbrace{\leq f(t)}_{\text{nach Vor.}} \vee t = c$ $\boxtimes$

5. <u>Beh. (2):</u> Jedes Element $a \in R$ ist eng.
<u>Bew.:</u> Gen. z.z.: $E := \{c \in R \mid c \text{ eng}\}$ ist Turm. ⌜Dann $E = R$⌟ <u>Zu a):</u> Klar ist $k \in E$.
<u>Zu b):</u> Zu $t \in E$ folgt $f(t) \in E$, denn für t eng folgt aus $a < f(t)$ schon $a \leq t$ laut Beh. (1).
<u>Zu c):</u> Noch z.z.: $\forall K \subseteq E$, K Kette: $b := \sup K \in E$.
Sei dazu $a \in R$ und $a < b$, z.z. ist $f(a) \leq b$.
⌜• Wenn $a < c$ für ein $c \in K$, so folgt wegen c eng sofort $f(a) \leq c \leq b$.
• Wenn nicht, so gilt $a \geq c$ für alle $c \in K$, folglich $a \geq b$ im $\lightning$ zur Annahme.⌟ $\boxtimes$

6. <u>Beweisende:</u> Beh. (2) und (1) zeigt, dass R total geordnet ist. ⌜$f(c) \geq c$⌟
Also ist R sowohl ein Turm als auch eine Kette,
und $\sup R$ ist ein Fixpunkt von f. $\square$

<u>Bemerkung zur Anschauung:</u> Anschaulich beschreiben S und f mehr oder weniger geordnetes Schlangestehen, etwa um in ein Flugzeug zu gelangen. Dann wäre S eine Menge möglicher Standplätze und f eine Vorschrift, die die Reisenden in jedem Zeitschritt von einem Standplatz zu einem besseren Standplatz vorrücken lässt oder aber stehenbleiben lässt. Ein enges Element einer unter f in sich abgebildete Teilmenge $R \subseteq S$ wäre etwa ein Standplatz direkt vor einem Drehkreuz, an dem die Bordkarten eingesammelt werden und alle Reisenden auf Standplätzen aus R einzeln vorbeigehen müssen, um ins Flugzeug zu gelangen. An einem engen El. hat S einen "Flaschenhals".