Vorlesung "Logische Grundlagen"

LG11: Die ZFC-Axiome

Stichworte: alle 10 ZFC-Axiome mit Besprechung, Erweiterungen von ZFC, Widerspruchsfreiheit von ZFC, Gödelsche Unvollständigkeitssätze, Kontinuumshypothese

---

§1: ZFC

Die ZFC-Axiome der Mengenlehre bilden (zusammen mit der Prädikatenlogik) seit knapp 100 Jahren die Grundlage für die moderne Mathematik.
So gut wie alle bewiesenen Sätze der Mathematik lassen sich als beweisbare Aussagen aus ZFC ableiten.
Dabei steht Z für E. Zermelo (1871–1953)
F für A. Fraenkel (1891–1965)
und C für "choice" = "Auswahl", d.h. dem Auswahlaxiom.
Die ZFC-Mengenlehre ist eine Erweiterung der Zermelo-Mengenlehre um Axiome/Anregungen von A. Fraenkel (um 1920), speziell die Idee, dass alle Objekte der Mathematik letztlich Mengen sind, geht auf Fraenkel zurück.

Wir listen die 10 ZFC-Axiome im folgenden auf. Vielen sind wir in der Vorlesung bereits begegnet als "intuitiv klar" – wie es "gute" Axiome sein sollten.

Axiom 1: Extensionalitätsaxiom

Mengen sind genau gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
$\forall A,B: \quad A=B \Leftrightarrow \forall C: (C\in A \Leftrightarrow C\in B)$

Bem.: Damit ist jede Menge durch ihre Elemente bestimmt.

Axiom 2: Leermengenaxiom (älter: Nullmengenaxiom)

Es gibt eine Menge, die keine Elemente hat.
$\exists A\ \forall X: \quad X\notin A$

Bem.: Dies garantiert die Existenz "der" leeren Menge: Aus Axiom 1 folgt bereits die Eindeutigkeit von $\emptyset$.

LG 11

Axiom 3: Paarmengenaxiom

Für alle A und B gibt es eine Menge, die A und B als Elemente hat.

$\forall A, B \ \exists C \ \forall D: \ (D \in C \Leftrightarrow D = A \vee D = B)$

Bem.: C ist nach Axiom 1 wieder eindeutig bestimmt, wir schreiben $C = \{A, B\}$.

Axiom 4: Vereinigungsaxiom

Für jede Menge A gibt es eine Menge B, deren Elemente genau die Elemente der Elemente von A sind: $\forall A \ \exists B \ \forall C: (C \in B \Leftrightarrow \exists D: D \in A \wedge C \in D)$

Bem.: B ist nach Axiom 1 eindeutig bestimmt und heißt die Vereinigung(smenge) von A, geschrieben $B = \bigcup A$. Wir haben diese allgemeine Vereinigungsmenge schon in LG 10 eingeführt – das Axiom 4 garantiert die Existenz bel. Vereinigungen.
Weiter: Sind A, B Mengen, ex. nach Axiom 3 die Menge $\{A, B\}$ und somit nach Axiom 4 dann $A \cup B := \bigcup \{A, B\}$.

Axiom 5: Potenzmengenaxiom

Zu jeder Menge A gibt es eine Menge B, deren Elemente genau die Teilmengen von A sind: $\forall A \ \exists B \ \forall C: \ C \in B \Leftrightarrow (\underbrace{\forall D: D \in C \Rightarrow D \in A}_{\text{Kurz: } C \subseteq A})$

Bem.: Nach diesem Axiom existiert die Potenzmenge $\mathcal{P}(A) := \{C \subseteq A\}$.

Axiom 6: Aussonderungsaxiom

Ist A eine Menge und Φ eine Aussage/Bedingung (genau: ein Prädikat), so gibt es eine Teilmenge B von A, die genau die Elemente C von A enthält, für die $\Phi(C)$ wahr ist.

$\forall A \ \exists B \ \forall C: \ C \in B \Leftrightarrow C \in A \wedge \Phi(C)$

Bem.: Somit existieren "eingeschränkte" Mengen der Form $\{C \in A \mid \Phi(C)\}$; die Elemente von A, für die Φ wahr ist, werden "ausgesondert".
Genaueres zu Φ: dies muss ein einstelliges Prädikat sein, in dem die Variable B nicht vorkommt.

Weitere Bem. zum Aussonderungsaxiom:

(i) Die Einschränkung auf eine Grundmenge A im Axiom ist nötig, um die Russelsche Antinomie zu vermeiden: Sonst impliziert Axiom 5 mit $\exists B \forall C: (C \in B \Leftrightarrow C \notin C)$ die Existenz der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten – die Russel-Menge R, die den logischen Widerspruch $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ erzeugt.

(ii) Die Annahme, dass es eine Menge aller Menge gäbe, also $\exists A \forall B: B \in A$ führt mit Axiom 4 zu einem Widerspruch.

(iii) Mit Axiom 6 kann man Axiom 2 ersetzen durch "Es gibt überhaupt eine Menge A", die leere Menge erhält man dann durch Aussondern: $\emptyset = \{C \in A \mid C \notin A\}$. (Auch Axiom 8 würde die Existenz von Mengen implizieren.)

Axiom 7: Ersetzungsaxiom (nach Fraenkel)

Ist A eine Menge und Φ eine Aussage/Bedingung (genau: ein Prädikat), die jeder Menge B genau eine Menge Φ_B zuordnet, so ist $D = \{\Phi_F \mid F \in A\}$ wieder eine Menge.

$$\forall A: \Big(\forall B \exists! \underset{\uparrow (\text{als } \Phi_B \text{ geschrieben})}{C}: \Phi(B,C) \Rightarrow \big(\exists D \forall E: E \in D \Leftrightarrow \exists F: F \in A \wedge \Phi(F,E)\big)\Big)$$

Bem.: Wird jedes Element von A durch eine neue Menge ersetzt, entsteht eine neue Menge; die Ersetzung wird mit zweistelligen Prädikaten vorgenommen.

Die Menge D schreiben wir als $D = \{E \mid F \in A \wedge \Phi(F,E)\}$

bzw. $D = \{E \mid \exists F \in A: \Phi(F,E)\}$.

Axiom 8: Unendlichkeitsaxiom

Es gibt eine Menge A mit $\emptyset \in A$ und $\forall B: B \in A \Rightarrow B \cup \{B\} \in A$.

Bem.: Diese Menge A enthält offenbar alle natürlichen Zahlen: Vgl. LG4 und die dort angegebenen Konstruktion der natürlichen Zahlen. Die "Peano-Axiome" sind keine Axiome im eigentlichen Sinn sondern können aus ZFC hergeleitet werden, wofür Axiom 8 grundlegend ist. Die aus den "Peano-Axiomen" herleitbaren Aussagen fasst man unter dem Begriff "Peano-Arithmetik" zusammen. Insb. Axiom 8 impliziert, dass $\mathbb{N}$ eine unendl. Menge ist (gemäß Def. aus LG9).

Axiom 9: Fundierungsaxiom / Regularitätsaxiom

Jede nichtleere Menge A enthält ein Element B, so dass A und B disjunkt sind.

$$\forall A: A \neq \emptyset \Rightarrow \exists B: B \in A \wedge \forall C: \underbrace{C \notin A \vee C \notin B}_{\Leftrightarrow \neg(C \in A \wedge C \in B)}$$

Bem.: Axiom 9 wurde später von Zermelo hinzugefügt, um unendliche oder zyklische Ketten der Form $a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \ldots$ auszuschließen, wie von Fraenkel gefordert wurde.
⌈Sonst hätte die Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ die Eigenschaft $\forall i: a_{i+1} \in \{a_i\} \cap A$ im ↯ zu Axiom 9.⌋
Somit kann eine Menge nicht sich selbst als Element enthalten. ⌈Die Kette $A \ni A$ ist ausgeschlossen.⌋

Axiom 10: Auswahlaxiom

Ist A eine Menge von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen, so gibt es eine Menge B, die genau ein Element aus jedem Element von A enthält.

$$\forall A: \emptyset \notin A \wedge (\forall C, D, E: C \in A \wedge D \in A \wedge E \in C \wedge E \in D \Rightarrow C = D)$$
$$\Rightarrow (\exists B\ \forall F: F \in A \Rightarrow \exists! G: G \in F \wedge G \in B)$$

1. Bem.: Jedem Element F von A wird also ein Element G von F zugeordnet; im Sinne einer Auswahlfunktion wie in LG10 formuliert.
Dort haben wir einige Umformulierungen von Axiom 10 kennengelernt, es gibt noch mehr, u.a. der sogenannte Wohlordnungssatz ("Jede Menge lässt sich wohlordnen", bewiesen (mit dem Auswahlaxiom) von E. Zermelo).
Das Auswahlaxiom ist das umstrittenste Axiom der Mathematik. Mathematiker, die es ablehnen, heißen Konstruktivisten. Die Problematik haben wir in LG10 schon besprochen. Letztlich führt es auch zu kontraintuitiven Aussagen wie dem Banach-Tarski-Paradoxon.

2. Bem.: Das ZFC-System ist redundant, d.h. die folgenden Axiome sind entbehrlich:
- Das Aussonderungsaxiom folgt aus dem Ersetzungsaxiom.
- Das Leermengenaxiom folgt aus dem Aussonderungsaxiom und der Existenz irgendeiner Menge (z.B. Unendlichkeitsaxiom).
- Das Paarmengenaxiom folgt aus dem Ersetzungsaxiom und dem Potenzmengenaxiom.

§2: Erweiterungen und Widerspruchsfreiheit von ZFC

ZFC ist grundlegend für die gesamte moderne Mathematik.
Es gibt Ausnahmen, wo ZFC nicht mehr ausreicht, z.B. wo man mit echten Klassen statt Mengen arbeiten muss (typischerweise manche Strukturen in Algebra), dafür gibt es dann passende Erweiterungen von ZFC.

Seit 1918 wurde im Rahmen des Hilbert-Programms ein Beweis für die Widerspruchsfreiheit von ZFC gesucht.
K. Gödel zeigte um 1930 seinen zweiten Unvollständigkeitssatz, der zeigt, das ein solcher Beweis im Rahmen der ZFC-Mengenlehre unmöglich ist, ja sogar, dass jede hinreichend mächtige formale, widerspruchsfreie System nicht die eigene Widerspruchsfreiheit beweisen kann.
Der erste Unvollständigkeitssatz von Gödel besagt, dass jedes hinreichend mächtige formale System entweder widersprüchlich oder unvollständig (d.h. nicht jede im System formulierbare wahre Aussage kann darin bewiesen werden) ist.
Die Annahme der Widerspruchsfreiheit der ZFC-Mengenlehre wird letztlich nur durch die Erfahrung belegt, dass ZFC seit ca. 100 Jahren benutzt wird ohne dass sich je ein Widerspruch gezeigt hat. Daher geht man eher von der Unvollständigkeit der modernen Mathematik aus, z.B. dass die Riemannsche Vermutung wahr aber unbeweisbar sein könnte (meines Wissens weiß man nur, dass sie mit ZFC widerlegbar ist, sollte sie falsch sein, nämlich ganz einfach durch die explizite Angabe einer Ausnahmenullstelle von ζ im kritischen Streifen).

Eine weitere interessante Fragestellung im Zusammenhang mit ZFC ist die Kontinuumshypothese (CH): Für keine Menge X ist $\#\mathbb{N} < \#X < \#\mathbb{R}$.
Hier bezeichnet $\#X$ für eine (bel. unendl.) Menge X die Kardinalzahl von X, welche als Äquivalenzklasse von X bzgl. der Ä-Rel. $X \sim Y :\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $X \to Y$ definiert wird. D. Hilbert präsentierte CH als 1. Problem (von 23) auf dem Mathematiker-Kongress 1900.

- K. Gödel zeigte 1938: ist ZFC widerspruchsfrei, dann auch ZFC mit (CH) als Axiom
- P. Cohen zeigte 1963: ist ZFC widerspruchsfrei, dann auch ZFC mit $\neg$(CH) als Axiom

Damit ist (CH) unabh. von ZFC und kann hinzugenommen werden oder sein Gegenteil oder nicht.